ÁLGEBRA LINEAL
HOJA 3

Advertencia: Los elementos (sean puntos o vectores) de $\mathbb{K}^n$ se expresan en COLUMNAS. ^{T} indica transposición.

Ejercicio 1. Estudiar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{K}^n$ son o no subespacios vectoriales: 1) $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{K}^3 : x-y+2z=0\}$, 2) $\{(x,y)^T \in \mathbb{K}^2 : x=y-3\}$, 3) $\{(x,y,z,t)^T \in \mathbb{K}^4 : z=x-t\}$, 4) $\{(x,y,z,t)^T \in \mathbb{K}^4 : 2x+y=1\}$, 5) $\{(x,y,z)^T \in \mathbb{K}^3 : xy=z\}$, Las matrices de las siguientes formas: 6) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$, 7) $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, 8) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix}$, 9) $\begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 10) $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. Estúdiese si en los siguientes casos los conjuntos dados tienen estructura de espacio vectorial con las operaciones definidas.

1. Definimos en $\mathbb{K}^2$ los siguientes productos por escalares:

   $$\text{a)} \quad a\cdot(x,y)^T = (ax,ay)^T \quad \text{b)} \quad a\cdot(x,y)^T = (ax,0)^T$$

   $$\text{c)} \quad a\cdot(x,y)^T = (a+ax-1, a+ay-1)^T \quad \text{d)} \quad a\cdot(x,y)^T = (ax^2,ay)^T$$

   Para cada uno de los productos anteriores, estudiar si la terna $(\mathbb{K}^2,+,\cdot)$ es un espacio vectorial (siendo $+$ la suma habitual de vectores en $\mathbb{K}^2$).

2. En $\mathbb{K}^3$ se definen las operaciones $\boxplus$ y $\boxdot$ como

   $$(x,y,z)^T \boxplus (x',y',z')^T = (x+x'+1, y+y'-1, z+z'+3)^T$$

   $$\lambda \boxdot (x,y,z)^T = (\lambda x+\lambda-1, \lambda y-\lambda+1, \lambda z+3\lambda-3)^T$$

   Estúdiese si $(\mathbb{K}^3,\boxplus,\boxdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

3. Decidir justificadamente si los siguientes conjuntos (con las operaciones habituales heredadas de $\mathbb{R}$) forman o no espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales:

   a) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a+b\sqrt{5} : a,b \in \mathbb{Z}\}$
   b) $\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a+b\sqrt{5} : a,b \in \mathbb{Q}\}$

Ejercicio 3.

1. Demuéstrese que el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de las funciones reales de variable real, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Para cada número real $a \in \mathbb{R}$ se consideran los conjuntos

$$M_a = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(0) = a\} \text{ y } H_a = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f(a) = 0\}$$

¿Qué valores de $a \in \mathbb{R}$ hacen que M_a sea subespacio vectorial de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$? ¿Y para que lo sea H_a?

2. En el conjunto $\mathcal{S} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{R}\}$ formado por todas las sucesiones reales, consideramos la suma y producto por escalares habituales (término a término).

Sean $\mathcal{S}_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge a cero}\}$ y $\mathcal{S}_{00} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \text{ existe } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } a_n = 0 \text{ para todo } n \geq n_0\}$. Demuestra que $\mathcal{S}$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y que $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_{00}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{S}$.

Ejercicio 4. Sean u_1, u_2, u_3 y u_4, vectores de V tales que las ternas de vectores siguientes son linealmente independientes:

$$\{u_1, u_2, u_3\}, \{u_1, u_2, u_4\}, \{u_1, u_3, u_4\}, \{u_2, u_3, u_4\}$$

Indicar razonadamente si se puede asegurar que los cuatro vectores son linealmente independientes.

Ejercicio 5.

1. En $\mathbb{K}^3$ (con la suma y producto por escalares usuales) se consideran los vectores $u = (2, -1, 0)^T, v = (0, 1, 1)^T$ y $w = (-1, 3, 2)^T$ con coordenadas dadas en la base canónica.

   a) Decidir si el conjunto $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente.
   b) Decidir si el conjunto $\{u, v, w\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{K}^3$.
   c) ¿Es $\{u, v, w\}$ una base de $\mathbb{K}^3$? Justifica brevemente la respuesta.
   d) Hallar las coordenadas del vector $(1, 2, 2)^T$ con respecto a $\{u, v, w\}$.

2. Sea $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos con su estructura usual de $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

   a) Comprobar que $u = (1 + i, 2i)^T$ y $v = (1, 1 + i)^T$ son linealmente independientes, mientras que no es así si se considera a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.
   b) Demostrar que $\mathcal{B} = ((1, 1)^T, (1, i)^T, (i, 1)^T, (i, -i)^T)$ es una base del $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ y obtener las coordenadas del vector $(3 + 2i, 5 + 4i)^T$ con respecto a $\mathcal{B}$.

Ejercicio 6.

a) Sean $u_1, u_2, \ldots, u_m$ vectores linealmente independientes en V. Para cada $1 \leq k \leq m$, demostrar que los vectores

$$v_1 = u_1, v_2 = u_1 - u_2, v_3 = u_1 - u_2 - u_3, \ldots, v_k = u_1 - u_2 - \ldots - u_k$$

son también linealmente independientes en V.

b) Determinar los valores de a y b para que el vector $(1, 4, a, b)^T$ sea combinación lineal de los vectores $(1, 2, -1, -2)^T$ y $(0, 1, 2, 1)^T$.

c) Demostrar que los vectores $(1, a, b)^T, (0, 1, c)^T$ y $(0, 0, 1)^T$ son linealmente independientes en $\mathbb{K}^3$ para cualesquiera escalares $a, b, c \in \mathbb{K}$.

d) ¿Qué valores de los escalares $a, b \in \mathbb{K}$ hacen que los vectores $(1, 1, 0, a)^T, (3, -1, b, -1)^T$ y $(-3, 5, a, -4)^T$ sean linealmente dependientes?

e) Estudiar la dependencia lineal del siguiente conjunto de vectores de $\mathbb{K}[t]$:

$$\{t^3, t^2 + t^3, 2 + t + t^3, 6 + 3t + t^2 + 6t^3\}$$

Ejercicio 7.

1. ¿Es el conjunto $\{(2, 1, -3)^T, (3, 2, -5)^T, (1, -1, 1)^T\}$ una base de $\mathbb{K}^3$? En caso afirmativo, calcula las coordenadas del vector $(6, 2, -7)^T$ en dicha base.

2. ¿Es el conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \right\}$ una base de $M_2(\mathbb{K})$? En caso afirmativo, calcula las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en dicha base. En caso negativo, modifica (i.e., reduce y/o amplía) hasta obterner una base y calcula las coordenadas.

3. Comprobar que los polinomios $p(x) = x^2 + x + 1$, $q(x) = 2x + 1$ y $r(x) = x^2 + 1$ forman una base de $\mathbb{K}[x]_2$ y hallar las coordenadas del polinomio constante 1 con respecto a esta base.

4. Se considera el subconjunto $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7\}$ de $\mathbb{K}^5$ con

$$u_1 = (0, 0, 1, 1, 1)^T, u_2 = (4, 1, 3, 5, 6)^T, u_3 = (2, 0, 0, 0, 0)^T, u_4 = (1, 1, 3, 0, 0)^T$$

$$u_5 = (6, 2, 1, 4, 2)^T, u_6 = (1, 1, 0, 0, 0)^T, u_7 = (-1, 1, 0, 2, 0)^T$$

a) Encontrar un subconjunto $\mathcal{B} \subseteq S$ que sea base de $\mathbb{K}^5$.

b) Hallar las coordenadas de los restantes vectores de S con respecto a la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio 8. Sea V un espacio vectorial de dimensión tres sobre $\mathbb{K}$ y sea $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, una base de V. Se pide: a) Calcular una base de V que contenga al vector $x = e_1 - e_2 + e_3$. b) Dados los vectores $y_1 = e_1 - e_2$ e $y_2 = e_2 + e_3$, hallar un tercer vector, y_3, de manera que $\{y_1, y_2, y_3\}$ formen una base de V y x tenga coordenadas $(1, 1, 1)^T$ respecto de esa base.

Ejercicio 9. En $\mathbb{K}^4$ consideramos dos bases $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ y $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ que están relacionadas mediante las igualdades:

$$\begin{cases} u_1 = 2e_1 + e_2 - e_3 \\ u_2 = 2e_1 + e_3 + 2e_4 \\ u_3 = e_1 + e_2 - e_3 \\ u_4 = -e_1 + 2e_3 + 3e_4 \end{cases}$$

Calcular las coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ del vector $v \in \mathbb{K}^4$ cuyas coordenadas en $\mathcal{B}'$ son $v = (2, 1, 0, 1)^T_{\mathcal{B}'}$, así como las coordenadas respecto de $\mathcal{B}'$ del vector $w \in \mathbb{K}^4$ cuyas coordenadas en $\mathcal{B}$ son $w = (1, 2, 1, 2)^T_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 10. Probar que $H = \{(x, y, z, t)^T \in \mathbb{K}^4 : x + y = z - t = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^4$. Encontrar una base de H y calcular su dimensión. Prolongar dicha base hasta una de $\mathbb{K}^4$.

Ejercicio 11. ¿Es el conjunto $S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 - y^2 - z^2 = 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$? Probar que $L(S) = \mathbb{R}^3$.

Ejercicio 12. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la unión de dos subespacios vectoriales sea subespacio vectorial es que uno de ellos esté contenido en el otro.

Ejercicio 13.

1. Dados los vectores $v_1 = (1, 2, a, 1)^T$, $v_2 = (a, 1, 2, 3)^T$ y $v_3 = (0, 1, b, 0)^T$ de $\mathbb{K}^4$, calcular $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $v_3 \in L(v_1, v_2)$ o, dicho de otra forma, tales que el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ sea linealmente dependiente. Para los valores obtenidos de a y b, determinar unas ecuaciones implícitas del subespacio generado.

2. Determinar el valor de $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ para que los vectores $v_1 = (-1, 5, 4)^T$ y $v_2 = (\alpha, -2, -2)^T$ generen el mismo subespacio vectorial de $\mathbb{K}^3$ que los vectores $u_1 = (\beta, 3, 2)^T$ y $u_2 = (5, 1, 0)^T$. Dicho de otra manera, para que $L(v_1, v_2) = L(u_1, u_2)$.

3. Encontrar el valor de $m \in \mathbb{K}$ tal que para la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & m \end{pmatrix}$ exista alguna matriz cuadrada $B \neq 0$ tal que $AB = 0$. Para dicho valor de m probar que $H = \{B \in M_2(\mathbb{K}) : AB = 0\}$ es un subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{K})$ y obtener una base y su dimensión.

Ejercicio 14.

1. Demostrar que $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ es una base de $\mathbb{K}[x]_3$ (espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la indeterminada x con coeficientes reales). Probar que $((1+x)^3, x(1+x)^2, x^2(1+x), x^3)$ es otra base de $\mathbb{K}[x]_3$ y hallar respecto a esta segunda base las coordenadas de los elementos de la primera. Hallar la matriz del cambio de base.

2. Dados los conjuntos de vectores $\mathcal{B} = ((3, 2, 5)^T, (2, 1, 3)^T, (1, 0, 2)^T)$ y $\mathcal{B}' = ((-2, 1, 3)^T, (-2, 1, 2)^T, (1, -1, 3)^T)$:

   a) Demostrar que son bases de $\mathbb{Q}^3$ y hallar las matrices del cambio de base en los dos sentidos.

   b) Hallar las coordenadas de $v = (2, -1, -4)^T_{\mathcal{B}}$ en la base $\mathcal{B}'$.

   c) Hallar las coordenadas de $w = (0, 1, 5)^T_{\mathcal{B}'}$ en la base $\mathcal{B}$.

   d) Escribir las coordenadas de v y w en la base canónica.

Ejercicio 15.

1. Calcular la dimensión del siguiente subespacio de $\mathbb{K}^4$ en función de los parámetros que aparecen:

$$U = L((1, a, 0, -a)^T, (0, 1, 1, a)^T, (-1, 0, a, 0)^T, (2, a+1, -a+1, 0)^T)$$

2. Dados los vectores

$$v_1 = (3, 2, \alpha, 5)^T \qquad v_2 = (2, -3, 5, \alpha)^T \qquad v_3 = (0, 13, \beta, 7)^T$$

   de $\mathbb{K}^4$, hallar el valor de $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ para que la subespacio vectorial $L(v_1, v_2, v_3)$ tenga dimensión 2.

3. Dados los vectores $u_1 = (2,1,0)^T$ y $u_2 = (-1,0,0)^T$ de $\mathbb{K}^3$, se considera el subespacio vectorial $U = L(u_1,u_2)^T$. Calcular unas ecuaciones paramétricas e implícitas de U, así como su dimensión y una base.

Ejercicio 16. En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que tres y coeficientes reales, consideramos el subespacio vectorial

$$P = \{p(x) \colon p(x) = p(-x)\}.$$

Calcula unas ecuaciones paramétricas y implícitas del subespacio respecto a la base estándar del espacio de polinomios de grado menor o igual que tres.

Ejercicio 17.

1. En el espacio vectorial $M_2(\mathbb{K})$, consideremos el subespacio vectorial U de todas las matrices simétricas (de orden 2):
   a) Hallar $\dim U$ y encontrar una base de U.
   b) Calcular las coordenadas de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ con respecto a la base de U dada en el apartado a).
   c) Dar unas ecuaciones implícitas y otras paramétricas de U.
2. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Probar que el conjunto $H = \{X \in M_2(\mathbb{K}) \mid XA = AX\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ y calcular su dimensión.
3. Generalizar a $M_n(\mathbb{K})$ donde n es arbitrario y $\mathbb{K}$ es un cuerpo de característica distinta de 2.

Ejercicio 18.

1. Hallar una base, su dimensión y unas ecuaciones implícitas respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^4$, del subespacio H que tiene por ecuaciones paramétricas respecto de dicha base:

$$H : \begin{cases} x = 2\alpha - \beta + \gamma + \delta \\ y = \alpha + \beta + 2\gamma + \delta \\ z = 3\alpha + 3\gamma + 2\delta \\ t = -\alpha + 5\beta + 4\gamma + \delta \end{cases}$$

Obtener unas ecuaciones implícitas de H con respecto de la base

$$\mathcal{B} = ((1,0,0,0)^T, (1,1,0,0)^T, (1,1,1,0)^T, (1,1,1,1)^T).$$

2. Sea $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ una base de un espacio vectorial V, y sean los vectores $v_1 = u_1 + u_3 + 2u_4$, $v_2 = 2u_1 + u_2 + 3u_3 + 4u_4$, $v_3 = u_1 - u_2 + 2u_4$. Obtener unas ecuaciones implícitas del subespacio $W = L(v_1, v_2, v_3)$.

Ejercicio 19. Dado el subespacio vectorial W de $\mathbb{K}^4$ definido por $x_1+x_2-x_3+x_4 = 0$ respecto de la base canónica. Se pide: a) Hallar una base de W b) Comprobar que el vector $(1,-2,0,1)^T$ está en W, y hallar sus coordenadas respecto de la base encontrada en el apartado a).

Ejercicio 20. Una matriz A de orden 3 se llama **cuadrado mágico** si la suma de cada una de sus 3 filas, de cada una de sus 3 columnas y de cada una de sus 2 diagonales es igual a un valor fijo $s \in \mathbb{K}$. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

1. Expresar la condición de que A sea un cuadrado mágico como un sistema lineal de 8 ecuaciones en las incógnitas s, a_i, b_i, c_i con $i = 1, 2, 3$.

2. Demostrar que $3b_2 = s$. Demostrar que la familia W de los cuadrados mágicos es un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{K})$ de dimensión 3 y que una base de W es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Sustituir las estrellas por números en las matrices B, C de modo que resulten cuadrados mágicos:

$$B = \begin{pmatrix} \star & 1 & \star \\ \star & \star & \star \\ 2 & \star & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \star & \star & \star \\ \star & \star & \star \end{pmatrix}$$