ÁLGEBRA LINEAL
HOJA 8

Nomenclatura:

- el **producto escalar** de dos vectores u, v se denota $\langle u, v\rangle$ (otras notaciones son $u \cdot v$ ó $\psi(u, v)$);
- el **producto vectorial** de vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ se denota $u \wedge v$ (ó $u \times v$).
- dados espacios vectoriales euclídeos $(V, \langle , \rangle)$ y $(V', \langle , \rangle')$, una **isometría** de V en V' es una aplicación lineal $f : (V, \langle , \rangle) \to (V', \langle , \rangle')$ tal que $\langle v_1, v_2\rangle = \langle f(v_1), f(v_2)\rangle', \forall v_1, v_2$ (otra denominación es **aplicación lineal ortogonal**);
- dado un espacio vectorial euclídeo $(V, \langle , \rangle)$ un endomorfismo f de V se dice **simétrico** si $\langle f(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, f(v_2)\rangle, \forall v_1, v_2$ (otra denominación es **endomorfismo autoadjunto**);
- una **simetría lineal** (o **reflexión lineal**) es una isometría involutiva de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, es decir una isometría $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $s^2 = \mathrm{id}$;
- una **rotación lineal** (o **giro lineal**) en $\mathbb{R}^2$ está determinada por un centro (que es el origen de coordenadas), una amplitud $\alpha \in [0, 2\pi)$ y un sentido (positivo o negativo);
- una **rotación lineal axial** (o **giro lineal axial**) en $\mathbb{R}^3$ está determinada por un vector, una amplitud $\alpha \in [0, 2\pi)$; el vector determina un eje de giro y un sentido de giro;
- Una **roto–simetría** en $\mathbb{R}^3$ es la composición (conmutativa) de una rotación axial y una simetría, cuando el eje de rotación y el plano de simetría son mutuamente ortogonales.

En el futuro veremos simetrías y rotaciones afines.

Ejercicio 1.

1. Da un ejemplo en el que $\langle u, v\rangle w \neq u\langle v, w\rangle$.
2. Determina si las siguientes aplicaciones $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son productos escalares y para aquellos que lo sean, encuentra una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

   a) $\langle (x, y)^T, (x', y')^T\rangle = 2xx' + 3xy' + 3x'y + 5yy'$, *b)* $\langle (x,y)^T, (x',y')^T \rangle = 9xx' + 6xy' + 3x'y + 4yy'$,

c) $\langle (x,y)^T, (x',y')^T \rangle = \sqrt{x^2(x')^2} + \sqrt{y^2(y')^2}$,

d) $\langle (x,y)^T, (x',y')^T \rangle = 9xx' + 6xy' + 6x'y + 4yy'$,

e) $\langle (x,y)^T, (x',y')^T \rangle = xx' + xy' + x'y$,

Ejercicio 2. *Las diagonales de un rombo son perpendiculares.* Si u y v son vectores de un espacio vectorial euclídeo tales que $\| u \| = \| v \|$, probar que los vectores $u+v$ y $u-v$ son ortogonales. (Un **rombo** es un paralelogramo todos cuyos lados tienen la misma longitud).

Ejercicio 3. Teorema del coseno. Utilizando el producto escalar usual, demostrar que Si a, b y c son los lados de un triángulo y α el ángulo formado por los lados b y c entonces $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Busca los enunciados del **teorema del seno** y el **teorema de la tangente**.

Ejercicio 4. Sea V un espacio vectorial euclídeo y sean U, U_1 y U_2 subespacios de V. Demostrar:

1. $\{0\}^\perp = V$ y $\{0\} = V^\perp$,
2. $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$,
3. $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$,
4. $U_1^\perp + U_2^\perp \subseteq (U_1 \cap U_2)^\perp$, con igualdad cuando la dimensión de V es finita
5. Si $f : (V, \langle,\rangle) \to (V', \langle,\rangle')$ es una isometría, entonces $f(U^\perp) \subseteq f(U)^\perp$, con igualdad cuando la dimensión de V es finita.
6. ¿qué relación hay entre U y $U^{\perp\perp}$?

Ejercicio 5.

1. En $M_n(\mathbb{R})$ se considera el producto escalar $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\,(AB^T)$. Hallar la matriz (de Gram) respecto de la base de $M_3(\mathbb{R})$ formada por las matrices A_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ cuyas entradas son todas 0 excepto la entrada (i,j), que vale 1. Generalizar a $M_n(\mathbb{R})$. Además, hallar el ortogonal del subespacio formado por las matrices simétricas.

2. Hallar la matriz (de Gram) del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base $\mathcal{B} = \big((1,0,0)^T, (1,1,0)^T, (1,1,1)^T\big)$.

   Idem respecto de la base $\mathcal{B}' = \big((1,1,2)^T, (3,1,1)^T, (-2,-1,2)^T\big)$.

3. En $\mathbb{R}[x]_2$ se considera el producto escalar definido por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$. Hallar la matriz (de Gram) este producto escalar respecto de la base estándar $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.

   Comprobar que $p = x - 1$ y $q = 3x - 1$ son ortogonales.

   Hallar $L(p)^\perp$, i.e., todos los polinomios de $\mathbb{R}[x]_2$ que son ortogonales a p.

4. En un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, un producto escalar tiene matriz (de Gram) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ respecto de cierta base $\mathcal{B}$. Si U es el subespacio de ecuaciones $x - y = x + z = 0$ respecto de $\mathcal{B}$, calcula $U^\perp$.

Ejercicio 6. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el subespacio U generado por el vector $(1,2,1)^T$. Hallar la proyección ortogonal sobre U, $p_U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuando se considera:

1. el producto escalar usual,

2. el producto escalar cuya matriz (de Gram) con respecto a la base canónica es $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7. Con el método de Gram–Schmidt, construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, respecto del producto escalar usual, a partir de cada una de las siguientes bases. Idem con el producto escalar cuya matriz (de Gram) respecto de la base canónica es $G = (g_{ij})$ donde $g_{ij} = i\delta_{ij}$ (**delta de Kronecker**).

1. $\mathcal{B}_1 = \big(v_1 = (1,0,0,0)^T,\ v_2 = (1,1,0,0)^T,\ v_3 = (1,1,1,0)^T,\ v_4 = (1,1,1,1)^T\big)$.

2. $\mathcal{B}_2 = \big(v_1 = (2,1,0,0)^T,\ v_2 = (-1,0,1,0)^T,\ v_3 = (1,-2,1,0)^T,\ v_4 = (0,0,0,1)^T\big)$.

3. $\mathcal{B}_3 = \big(v_1 = (1,-1,-1,-1)^T,\ v_2 = (1,1,0,0)^T,\ v_3 = (1,0,1,0)^T,\ v_4 = (1,0,0,1)^T\big)$.

Ejercicio 8. *Propiedades del producto vectorial.* Demostrar que $\forall u, u', v, w \in \mathbb{R}^3$ y $\forall a \in \mathbb{R}$, se verifica

1. $(u + u') \wedge v = u \wedge v + u' \wedge v$, (linealidad en la primera variable).
2. $(au) \wedge v = a(u \wedge v) = u \wedge (av)$, (linealidad en la primera variable).
3. $u \wedge v = -(v \wedge u)$, (antisimetría)
4. Si u, v son linealmente independientes, entonces $\|u \wedge v\|$ es el área del paralelogramo determinado por u e v.
5. $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w$.
6. Dar un ejemplo en el que $u \wedge (v \wedge w) \neq (u \wedge v) \wedge w$. El producto vectorial no es asociativo.
7. $\| u \wedge v \|^2 = \| u \|^2 \| v \|^2 - \langle u, v\rangle^2$ (**identidad de Lagrange**).
8. $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$ (**identidad de Jacobi**).

Ejercicio 9. Producto mixto. Es sabido que el volumen de un paralelepípedo está dado por el área de su base por su altura y se demuestra (usando integración elemental) que el volumen de una tetraedro es la *tercera parte* del área de su base por su altura. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, su *producto mixto* es, por definición, $\langle x, y \wedge z\rangle \in \mathbb{R}$. En coordenadas, tenemos

$$\langle x, y \wedge z\rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Sean $P_{x,y,z}$ el paralelepípedo determinado por x, y, z, $T_{x,y,z}$ el tetraedro determinado por x, y, z y $\mathrm{Pir}_{x,y,x+y,z}$ la pirámide (irregular) determinada por $x, y, x+y, z$. Demostrar

1. $\mathrm{vol}\, P_{x,y,z} = |\langle x, y \wedge z\rangle|$,
2. $\mathrm{vol}\, T_{x,y,z} = |\langle x, y \wedge z\rangle| /6$,
3. $\mathrm{vol}\,\mathrm{Pir}_{x,y,x+y,z} = |\langle x, y \wedge z\rangle| /3 = \mathrm{vol}\,\mathrm{Pir}_{y,z,y+z,x} = \mathrm{vol}\,\mathrm{Pir}_{z,x,z+x,y}$

Generalización: Dados n vectores en $\mathbb{R}^n$, se define el n–**volumen** del n–**paralepípedo** determinado por ellos como el valor absoluto del determinante de su matriz de coordenadas respecto de la base canónica.

Ejercicio 10.

1. Si f es un endomorfismo simétrico de V entonces $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ son mutuamente ortogonales (i.e., cada uno es el complemento ortogonal del otro).

2. Si la dimensión de V es finita, dada una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V, la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ es simétrica si y solo si f es simétrico.

3. Prueba que son equivalentes:

    a) f es endomorfismo simétrico e isometría,

    b) f es endomorfismo involutivo (i.e., $f^2 = \mathrm{id}$) e isometría,

    c) $V = V_1 \oplus V_{-1}$ (i.e., todo vector se descompone de modo único en suma de un vector fijo y un vector que se invierte por f) y V_1, V_{-1} son mutuamente ortogonales.

    En tal caso, demuestra que si $\mathcal{B}_1$ es una base ortonormal de V_1 y $\mathcal{B}_{-1}$ es una base ortonormal de V_{-1} entonces $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1}$ es una base ortonormal de V. ¿Cómo es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$?

4. Determina la matriz, respecto de la base canónica, de un endomorfismo simétrico f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $f(e_2) = 2e_1 + 2e_2$ y $2e_1 - 2e_2 - e_3$ es autovector.

Ejercicio 11.

1. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las simetrías $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en los planos $H_1 : y = 0$, $H_2 : x - y = 0$, $H_3 : x + y + z = 0$. Halla la matriz de la isometría composición $f = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ respecto de la base canónica y describe f verbalmente. ¿Qué puedes decir de las composiciones de $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ en otro orden?

2. Sea $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una simetría sobre una recta vectorial. Encuentra una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz de s respecto de $\mathcal{B}$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. ¿Cuántas tales bases podemos encontrar en $\mathbb{R}^2$? Idem $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12. Sea $\alpha \in [0, 2\pi)$. En el plano $\mathbb{R}^2$ denotemos por r_α la rotación de centro el origen, amplitud α y sentido positivo. Denotemos por s_α la simetría sobre la recta vectorial que forma un ángulo de $\alpha/2$ con el semieje positivo de las x en sentido positivo. (Obs: $r_{2\pi-\alpha}$ es la rotación de centro el origen, amplitud α y sentido negativo.) Usando matrices, demostrar:

1. $r_\alpha \circ r_\beta = r_\beta \circ r_\alpha = r_{\alpha+\beta}$,
2. $s_\alpha \circ s_\beta = r_{\alpha-\beta}$,
3. $r_\alpha \circ s_\beta = s_{\alpha+\beta}$,
4. $s_\alpha \circ r_\beta = s_{\alpha-\beta}$,

Deducir que $s_\alpha \circ s_\beta = s_\beta \circ s_\alpha$ si y sólo si los ejes de simetría son perpendiculares o coincidentes. Esto es: *dos simetrías en $\mathbb{R}^2$ conmutan si y solo si sus ejes son perpendiculares o coincidentes.*

En los siguientes 4 ejercicios en $\mathbb{R}^3$, fijamos la recta $E = L(u)$ y el plano $E^\perp$, de ecuación $ax + by + cz = 0$, con $u = (a, b, c)^T$ vector unitario.

Ejercicio 13. *Matriz A de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre una recta.* Demostrar que la matriz (respecto de la base canónica) de p_E es

$$A = uu^T = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ejercicio 14. *Matriz R de la rotación $r_{u,\alpha}$ en $\mathbb{R}^3$, alrededor del eje generado por u, amplitud $\alpha \in [0, 2\pi)$ y sentido positivo.* **Fórmula de Rodrigues.**

1. Demostrar que la aplicación $g_u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $g_u(x) = u \wedge x$ es lineal y satisface $g_u^2 = p_E - \mathrm{id}$ y $g_u^3 = -g_u$ y que la matriz de g_u (respecto de la base canónica) es
$$B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$
2. Demostrar que $r_{u,\alpha} = \mathrm{id} + (\operatorname{sen}\alpha) g_u + (1 - \cos\alpha) g_u^2$ y que la matriz de $r_{u,\alpha}$ (respecto de la base canónica) es
$$R = I + (\operatorname{sen}\alpha)B + (1 - \cos\alpha)(A - I). \tag{3}$$
3. Demostrar que $AB = BA = 0$, $B^2 = A - I$, $B^3 = -B$, $RB = BR = (\cos\alpha)B + (\operatorname{sen}\alpha)B^2$ y que
$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} R - 1), \qquad \operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(RB).$$
Si $a \neq 0$ y $R = (r_{ij})$, demostrar que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{r_{32} - (1-\cos\alpha)bc}{a}$.

4. (Sentido negativo) Demostrar que la matriz de $r_{u,2\pi-\alpha}$ (respecto de la base canónica) es
$$I + (-\operatorname{sen}\alpha)B + (1-\cos\alpha)(A-I) = R^T = R^{-1}.$$

5. Demostrar que $r_{u,\alpha} = r_{-u,-\alpha} = r_{-u,2\pi-\alpha}$ y que $r_{-u,\alpha} = r_{u,\alpha}^{-1} = r_{u,2\pi-\alpha}$ (Sentido negativo).

Ejercicio 15. *Matriz S de la simetría $s_{E^\perp}$ en $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $E^\perp$.* **Relación de Householder.** Demostrar que $s_{E^\perp} = \operatorname{id} - 2p_E$ y que la matriz de $s_{E^\perp}$ (respecto de la base canónica) es $S = I - 2A$, con las notaciones de los ejercicios previos.

Ejercicio 16. *Matriz RS de la roto–simetría $s_{E^\perp} \circ r_{u,\alpha} = r_{u,\alpha} \circ s_{E^\perp}$* . Con las notaciones de los tres ejercicios previos, demostrar

1. $SB = B = BS$ y $S(A-I) = (A-I) = (A-I)S$,
2. $SR = RS = S + (\operatorname{sen}\alpha)B + (1-\cos\alpha)(A-I)$ es la matriz de la roto–simetría dada (respecto de la base canónica).
3. Demuéstrese que
$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} RS + 1), \qquad \operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(RSB).$$
Si $a \neq 0$ y $RS = (q_{ij})$, demostrar que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{q_{32} - (2-\cos\alpha)bc}{a}$.

Ejercicio 17. Sea R la matriz de una rotación y consideremos la matriz antisimétrica $B' = R - R^T$. Sea $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $u \wedge x = B'x$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Pruébese que si $B' \neq 0$, (es decir, si R no es simétrica) entonces $L(u)$ es el eje de la rotación R y que $B' = 0$ si y solo si R es la identidad o una rotación de ángulo $\theta = \pi$. ¿Qué relación tiene la matriz B' con la matriz B definida anteriormente? ¿Cuál es el resultado análogo en el caso de una roto-simetría?

Ejercicio 18.

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación dada por
$$f(x,y,z)^T = \frac{1}{3}(-x+2y+2z, 2x-y+2z, 2x+2y-z)^T.$$
Probar que f es una isometría y describirla geométricamente. ¿ Es $f^2 = \operatorname{id}$?

2. Hallar la matriz (respecto de la base canónica) de la rotación en $\mathbb{R}^3$ de amplitud $\pi/2$ alrededor de la recta $x = y = z$ y sentido positivo. Idem con sentido negativo.

3. Calcular la matriz, respecto de la base canónica, de la simetría de $\mathbb{R}^3$ sobre del plano $x = y$.

4. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{-\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

   Comprobar que f es una isometría y describirla en términos de rotaciones y simetrías.

Ejercicio 19. Sea el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz es $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -1 & -3 \\ \sqrt{6} & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Compruébese que f es una roto–simetría.

2. Calcúlese el eje y el ángulo de la rotación asociada y el plano de la simetría asociada a f.

3. Calcúlese una matriz de rotación R y una simetría S tales que $M = RS$.