Algebra Lineal. Clasificación de movimientos en $\mathbb{R}^2$ por M. J. de la Puente Muñoz

En $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2 = V$ consideremos un producto escalar $\langle , \rangle$ y una base $\mathcal{B}$ ortonormal respecto de $\langle , \rangle$ (p.e., el producto escalar usual y la base canónica). Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un movimiento y su matriz de f respecto del sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ (en llegada y salida)

$$\begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ - & & - \\ C & | & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ - & & - \\ C & | & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & | & 0 \\ - & & - \\ 0 & | & A \end{pmatrix}, \qquad f = t_{\overrightarrow{OC}} \circ \overrightarrow{f}, \qquad t_{\overrightarrow{OC}} \text{ traslación de vector } \overrightarrow{OC},$$

donde $O \in \mathbb{R}^2$ es un punto cualquiera. Sabemos que la columna $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ son las coordenadas de $f(O)$ respecto de $\mathcal{R}$ y que $A \in M_2^{orto}(\mathbb{R})$ es la matriz de $\overrightarrow{f}$ respecto de $\mathcal{B}$ (en llegada y salida). En general, $f \neq \overrightarrow{f} \circ t_{\overrightarrow{OC}}$.

Si existen puntos fijos, el *subespacio afín de puntos fijos* $\mathrm{Fix}(f)$ está dado por ecuaciones implícitas $C + (A - I)X = 0$.

Es importante estudiar otro subespacio afín (no vacío en dimensión 2), denotado $\mathrm{Inv}(f)$, invariante por f y dado por ecuaciones implícitas $(A - I)C + (A - I)^2 X = 0$. Puede ocurrir que $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Inv}(f)$.

$\det(A)$	$\mathrm{rg}(A-I)$	$\mathrm{rg}(A-I\|C)$	$\mathrm{Fix}(f)$	$\mathrm{Inv}(f)$	vector	nombre y descripción
1 $A \neq I$	2	2	punto F : $x_0 = \det \begin{pmatrix} -c_1 & -\operatorname{sen}\alpha \\ -c_2 & \cos\alpha - 1 \end{pmatrix} / 2(1-\cos\alpha)$, $y_0 = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - 1 & -c_1 \\ \operatorname{sen}\alpha & -c_2 \end{pmatrix} / 2(1-\cos\alpha)$	$\{F\}$		$r_{F,\alpha}$ rotación (o giro) centro F ampl. $\alpha \in [0, 2\pi)$, sent. pos.
-1	1	2	$\emptyset$	recta E : $-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}(c_1 - 2x) +$ $\cos\frac{\alpha}{2}(c_2 - 2y) = 0$	$w =$ $(A+I)C/2$	simetría deslizante, i.e., compos. simetría y trasl. $s_E \circ t_w = t_w \circ s_E$, con $w \parallel E$
-1	1	1	recta E : $-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}(c_1 - 2x) + \cos\frac{\alpha}{2}(c_2 - 2y) = 0$	recta E		s_E, simetría en recta E
$A = I$	0	1	$\emptyset$	$\mathbb{R}^2$	$\overrightarrow{OC} \neq 0$	$t_{\overrightarrow{OC}}$, traslación vect. $\overrightarrow{OC} \neq 0$
$A = I$	0	0	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^2$	$\overrightarrow{OC} = 0$	identidad

Caso particular: si $A = -I$, entonces $f = r_{F,\pi} = h_{F,-1}$ es la *aplicación antipodal* de centro F (caso $\mathrm{rg}(A-I) = \mathrm{rg}(A-I|C) = 2$) y es también la *homotecia de razón* -1, donde $F = C/2$. (En efecto, tenemos $\operatorname{sen}\pi = 0$, $\cos\pi = -1$, $x_0 = \det \begin{pmatrix} -c_1 & 0 \\ -c_2 & -2 \end{pmatrix} / 4 = c_1/2$, $y_0 = c_2/2$.)