Algebra Lineal. Clasificación de movimientos en $\mathbb{R}^3$ por M. J. de la Puente Muñoz

En $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3 = V$ consideremos un producto escalar $\langle , \rangle$ y una base $\mathcal{B}$ ortonormal respecto de $\langle , \rangle$ (p.e., el producto escalar usual y la base canónica). Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un movimiento y su matriz de f respecto del sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \mathcal{B}\}$ (en llegada y salida)

$$\begin{pmatrix} 1 & \mid & 0 \\ - & & - \\ C & \mid & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mid & 0 \\ - & & - \\ C & \mid & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mid & 0 \\ - & & - \\ 0 & \mid & A \end{pmatrix}, \qquad f = t_{\overrightarrow{OC}} \circ \overrightarrow{f}, \qquad t_{\overrightarrow{OC}} \text{ traslación de vector } \overrightarrow{OC},$$

donde $O \in \mathbb{R}^3$ es un punto cualquiera. Sabemos que la columna C contiene las coordenadas de $f(O)$ respecto de $\mathcal{R}$ y que $A \in M_3^{orto}(\mathbb{R})$ es la matriz de $\overrightarrow{f}$ respecto de $\mathcal{B}$ (en llegada y salida). En general, $f \neq \overrightarrow{f} \circ t_{\overrightarrow{OC}}$.

Si existen puntos fijos, el *subespacio afín de puntos fijos* $\mathrm{Fix}(f)$ está dado por ecuaciones implícitas $C + (A - I)X = 0$.

Es importante estudiar otro subespacio afín (no vacío en dimensión 3), denotado $\mathrm{Inv}(f)$, invariante por f y dado por ecuaciones implícitas $(A - I)C + (A - I)^2 X = 0$. Puede ocurrir que $\mathrm{Fix}(f) = \mathrm{Inv}(f)$.

$\mathrm{rg}(A - I)$	$\mathrm{rg}(A - I \mid C)$	$\mathrm{Fix}(f)$	$\mathrm{Inv}(f)$	vector auxiliar	nombre y descripción	orientación
3	3	punto F	$\{F\}$		roto–simetría $s_{E^\perp} \circ r_{E,\alpha} = r_{E,\alpha} \circ s_{E^\perp}$ amplitud $\alpha \in [0, 2\pi)$, sent. pos. $\{F\} = E \cap E^\perp$	invierte
2	3	$\emptyset$	recta E	$w = \langle \overrightarrow{OC}, e \rangle e / \|e\|^2 =$ $= p_{dirE}(\overrightarrow{OC})$ donde e genera $dirE$	movimiento helicoidal (o rotación deslizante), i.e., compos. de rotación y traslación $r_{E,\alpha} \circ t_w = t_w \circ r_{E,\alpha}$, con $w \parallel E$	conserva
2	2	recta E	recta E		$r_{E,\alpha}$, rotación o giro de eje E amplitud $\alpha \in [0, 2\pi)$, sent. pos.	conserva
1	2	$\emptyset$	plano H	$w = (A + I)C/2$	simetría deslizante, i.e., compos. de simetría y traslación $s_H \circ t_w = t_w \circ s_H$, con $w \parallel H$	invierte
1	1	plano H	plano H		s_H, simetría sobre plano H	invierte
0	1	$\emptyset$	$\mathbb{R}^3$	$\overrightarrow{OC} \neq 0$	$t_{\overrightarrow{OC}}$, traslación de vector $\overrightarrow{OC} \neq 0$	conserva
0	0	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3$	$\overrightarrow{OC} = 0$	identidad	conserva

Casos particulares:

a. si $A = -I$, entonces f es la *aplicación antipodal* de centro F (caso $\mathrm{rg}(A - I) = \mathrm{rg}(A - I \mid C) = 3$). Además, $f = h_{F,-1}$ *homotecia* de centro F y razón -1..

b. la rotación $r_{E,\pi}$ también se llama *simetría sobre la recta E*, y conserva la orientación.