ÁLGEBRA LINEAL
Hoja 1

Advertencia: colocaremos las coordenadas de vectores y puntos de $\mathbb{K}^n$ en **columnas**.

Ejercicio 1 (Extraído de **Nueve capítulos del arte matemática**, China, S. III AC) Supongamos que 5 corderos, 4 patos, 3 pollos y 2 conejos valen 1496 monedas, 4 corderos, 2 patos, 6 pollos y 3 conejos valen 1175 monedas, 3 corderos, un pato, 7 pollos y 5 conejos valen 958 monedas, 2 corderos, 3 patos, 5 pollos y un conejo valen 861 monedas. Dime cuál es el precio de un cordero, un pato, un pollo y un conejo.

Ejercicio 2 El problema de las cien aves. (Extraído de **Manual de matemáticas de Zhang Qiujian**, China, S. V DC) Un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y tres polluelos valen una moneda. Con 100 monedas queremos comprar 100 aves. ¿Cuántos gallos, gallinas y polluelos podemos comprar?

Ejercicio 3 Hierón, rey de Siracusa, entregó a un orfebre 7465 gramos de oro para hacer una corona. Sospechando que el orfebre había reemplazado parte del oro por plata, Hierón consultó a Arquímedes. Arquímedes sumergió la corona en agua, la cual desalojó 467 g. de líquido. Se sabe que el oro desaloja agua por valor de 52 milésimas de su peso, mientras que la plata lo hace por valor de 95 milésimas. Hallar los gramos de oro y plata de la corona real.

Ejercicio 4 Hallar la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ de la parábola que pasa por los puntos $P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$ y $P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -13 \end{pmatrix}$. Hallar la ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ de la circunferencia que pasa por los puntos P_1, P_2, P_3.

Ejercicio 5 Resolver, si es posible, los siguientes sistemas lineales en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, según convenga (es recomendable usar el método de Gauss o de Gauss–Jordan):

a) $\left\{ \begin{array}{rcr} 3x - 2y &=& 6 \\ 9x + 4y &=& 108 \end{array} \right.$ b) $\left\{ \begin{array}{rcr} x + y - 2z &=& 9 \\ 2x - y + 4z &=& 4 \\ 2x - y + 6z &=& -1 \end{array} \right.$ c) $\left\{ \begin{array}{rcr} x + y + z &=& 2 \\ 2x + 3y + 5z &=& 11 \\ x - 5y + 6z &=& 29 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{rcr} -x + z &=& -2 \\ 2x - y + z &=& 1 \\ -3x + 2y - 2z &=& -1 \\ x - 2y + 3z &=& -2 \\ 5x + 2y + 6z &=& -1 \end{array} \right.$ e) $\left\{ \begin{array}{rcr} x_1 + 2x_3 - 2x_4 &=& 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &=& -2 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &=& 1 \end{array} \right.$

f) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+2z-s+3t & = & 0 \\ x+2y+3z+s+t & = & 0 \\ 3x+6y+8z+s+5t & = & 0 \end{array}\right.$ g) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x_2-6x_3-4x_4-3x_5 & = & -5 \\ -x_1+3x_2-10x_3-4x_4-4x_5 & = & -2 \\ 2x_1-6x_2+20x_3+2x_4+8x_5 & = & -8 \end{array}\right.$

h) $\left\{\begin{array}{lllllll} x & + & 2y & - & \sqrt{2}z & = & 0 \\ 3x & & & - & (\sqrt{2}+6)z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$, i) $\left\{\begin{array}{lllllllll} x & + & y & + & iz & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & - & t & = & 1 \\ x & + & iy & - & z & + & it & = & 2 \\ x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right.$.

Ejercicio 6 Discutir los siguientes sistemas en función del parámetro (o parámetros) que aparece(n) en cada uno de ellos, considerando tanto el caso real como el complejo:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 1 \\ -x+2z & = & 3 \\ 3x+2y+mz & = & 1 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} x+my+z & = & 1 \\ mx+y+(m-1)z & = & m \\ x+y+z & = & m+1 \end{array}\right.$ c) $\left\{\begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=b \\ x+y+az=b^2 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcl} (a+1)x+y+z & = & a-1 \\ x+(a+1)y+z & = & 2 \\ x+y+(a+1)z & = & a+1 \end{array}\right.$ e) $\left\{\begin{array}{rcl} ax+y+z & = & 1 \\ x+ay+z & = & 1 \\ x+y+az & = & 2a-1 \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ 2x+3y+az & = & 3 \\ x+ay+3z & = & 2 \end{array}\right.$

g) $\left\{\begin{array}{lllllll} ax & & & + & 2z & = & 2 \\ 5x & + & 2y & & & = & 1 \\ x & - & 2y & + & bz & = & 3 \end{array}\right.$, h) $\left\{\begin{array}{lllllll} ax & + & by & + & 2z & = & 1 \\ ax & + & 2(b-1)y & - & 3z & = & 1 \\ ax & + & by & + & (b+3)z & = & 2b-1 \end{array}\right.$.

Ejercicio 7 ¿Tiene solución el sistema $\left\{\begin{array}{rcl} 2\sin\alpha-\cos\beta+3\tan\gamma & = & 3 \\ 4\sin\alpha+2\cos\beta-2\tan\gamma & = & 10 \\ 6\sin\alpha-3\cos\beta+\tan\gamma & = & 9 \end{array}\right.$?

Ejercicio 8 ¿Qué deben cumplir los parámetros reales a, b, c para que el sistema de ecuaciones siguiente tenga soluciones reales x, y, z?

$$\left\{\begin{array}{ll} y^2+z^2 & =2a^2+x^2/2 \\ x^2+z^2 & =2b^2+y^2/2 \\ x^2+y^2 & =2c^2+z^2/2 \end{array}\right.$$

Ejercicio 9 Resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 1 & x \\ y & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}\right).$$

Ejercicio 10 Hallar las matrices A y B que son soluciones de cada uno de los siguientes sistemas:

a) $3A+2B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$; $\qquad 2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $2A+B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\qquad A-3B=\begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 11 Se dice que las matrices A, B **conmutan** si $AB = BA$. Observemos que si A, B conmutan entonces aambas son cuadradas del mismo tamaño.

Encontrar todas las matrices que conmutan con $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Encontrar todas las matrices que conmutan con todas las matrices diagonales de tamaño n.

Ejercicio 12 Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Razonar si existe alguna matriz X no nula, que cumpla $XA = BX^T$.

Ejercicio 13 Se dice que A es **idempotente** si $A^2 = A$ (resp. **involutiva** si $A^2 = I_n$) (resp. **nilpotente de orden** $k \in \mathbb{N}$ si $A^k = 0_n$). Sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, determinar todas las matrices de tamaño 2 idempotentes (resp. involutivas) (resp. nilpotentes de orden $k = 2$).

Ejercicio 14 Probar que si A es idempotente, entonces también lo es la matriz $B = I - A$ y además $AB = 0 = BA$ (siendo I la matriz identidad del mismo tamaño que A) .

Ejercicio 15 Una matriz cuadrada es **simétrica** si coincide con su traspuesta, $A = A^T$. Se dice que es **antisimétrica** si coincide con la opuesta de su traspuesta, $A = -A^T$.

a) Probar que la suma de matrices simétricas es simétrica. Demostrar que el producto no lo es en general. ¿Ocurre lo mismo para matrices antisimétricas?

b) Dada una matriz cuadrada A, demostrar que $A + A^T$ es simétrica y que $A - A^T$ es antisimétrica.

c) Probar que toda matriz cuadrada se puede descomponer, de forma única, como suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica, si $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$.

Ejercicio 16 Se llama *traza* de una matriz cuadrada A a la suma de los elementos de su diagonal principal, y lo denotamos por $\mathrm{tr}(A)$ i.e., $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, siendo $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. Si A y B son dos matrices cuadradas de tamaño n, probar que:

a) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.

b) $\mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}(A)$, para todo $k \in \mathbb{K}$.

c) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

d) $\mathrm{tr}(PAP^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$, si P es una matriz invertible del mismo tamaño que A.

e) Dar un contraejemplo que muestre la falsedad de $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$.

Ejercicio 17 Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$.

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\mathrm{tr}(AA^T)$ es un real no negativo.

b) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, demostrar que $AA^T = 0$ implica $A = 0$.

c) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, demostrar que $\mathrm{tr}(AA^T) = 0$ implica $A = 0$.

d) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, encontrar una matriz no nula A tal que $\mathrm{tr}(AA^T) = 0$.

Ejercicio 18 a) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. ¿Por qué no se cumplen las igualdades $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$, $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$ y $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$?

b) Existencia de **divisores de cero**: calcular el producto AB, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19 Matrices de rango máximo. Dadas $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ tales que $AB = I_m$ ¿es cierto que $m = \min\{m,n\} = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$? Dar una demostración o encontrar un contraejemplo. [OBS: se dice que A tiene **rango máximo (o pleno)** si $\mathrm{rg}\, A = \min\{m,n\}$. Se dice que A tiene **rango pleno por filas** si $\mathrm{rg}\, A = m$. Se dice que A tiene **rango pleno por columnas** si $\mathrm{rg}\, A = n$.]

Ejercicio 20 Matrices de rango mínimo.

1. Demostrar que una matriz rectangular tiene **rango menor o igual que uno** si y sólo si es producto de columna por fila.

2. Dadas matrices $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n\times r}(\mathbb{K})$, demostrar que

$$AB = (\operatorname{col}(A,1)|\cdots|\operatorname{col}(A,n)) \begin{pmatrix} \operatorname{fil}(B,1) \\ - \\ \vdots \\ - \\ \operatorname{fil}(B,n) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{col}(A,j)\operatorname{fil}(B,j)$$

y concluir que *el producto AB se expresa como la suma de n matrices de rango menor o igual que uno.*

Pregunta: ¿cómo conjeturas que son las matrices de rango menor o igual que dos?

Notación: $\operatorname{col}(A,j)$ indica la columna j–sima de A y $\operatorname{fil}(A,j)$ indica la fila j–sima de A.