

**ÁLGEBRA LINEAL**  
**HOJA 4**

**Ejercicio 1.**

1. Dados tres vectores  $u_1, u_2, u_3$  linealmente independientes en un espacio vectorial  $E$ , se consideran los subespacios vectoriales  $U = L(u_1 + u_2, u_2 + u_3)$  y  $V = L(u_1 + u_2 + u_3, u_2 - u_3)$ . ¿Cuál es la dimensión de  $U \cap V$ ?
2. En  $\mathbb{K}^3$  se consideran los subespacios vectoriales

$$U : x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$W = L((1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (-1, -1, 1)^T)$$

- a) Calcular unas ecuaciones paramétricas, la dimensión y una base de  $U$ .
  - b) Calcular unas ecuaciones implícitas, la dimensión y una base de  $W$ .
  - c) Determinar los subespacios vectoriales  $U \cap W$  y  $U + W$ .
3. En  $M_2(\mathbb{K})$  se consideran los subespacios vectoriales

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a - b & a + b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K} \right\}, \quad V_2 : \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 2a - c - d = 0 \end{cases}$$

donde  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ . Calcular unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implícitas, una base y la dimensión de los subespacios  $V_1 \cap V_2$  y  $V_1 + V_2$ .

4. En  $\mathbb{K}^4$  se consideran los subespacios vectoriales

$$U = L((1, -1, 2, 1)^T, (0, 1, -1, 3)^T, (2, 0, 1, -1)^T)$$

$$W : \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - 2y + 6z - 6t = 0 \end{cases}$$

Calcular la dimensión, una base y ecuaciones paramétricas e implícitas de  $U, W, U \cap W$  y  $U + W$ .

5. En  $\mathbb{K}^4$  se consideran los subespacios vectoriales  $U : y + z + t = 0$  y  $W : x + y = z - 2t = 0$ . Hallar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de  $U, W, U \cap W$  y  $U + W$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $a, b \in \mathbb{K}$  y consideremos los subespacios

$$H : \begin{cases} bx_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad L : \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Calcular las dimensiones de  $H$  y  $L$ .
2. ¿Existen valores de  $a$  y  $b$  para los que  $H = L$ ?
3. ¿Cómo deben tomarse  $a$  y  $b$  para que  $H \neq L$  y  $H + L \neq \mathbb{K}^4$ ?

**Ejercicio 3.** Sea  $U$  el subespacio de  $\mathbb{K}^3$  de ecuaciones implícitas  $x + y + z = 0 = z$ . Determina un subespacio  $V$  de  $\mathbb{K}^3$  de forma que  $U \cap V = \{0\}$  y  $U + V$  tenga por ecuación cartesiana  $x + y + z = 0$ .

**Ejercicio 4.** Sean  $F, G, H$ , subespacios del espacio vectorial  $E$ . Demostrar o dar contraejemplos de las afirmaciones siguientes:

1.  $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$ , (indicación: es falsa)
2.  $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$ , (indicación: es verdadera)
3.  $\dim(F \cap (G + H)) = \dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(F \cap H \cap G)$ , (indicación: es falsa).

**Ejercicio 5.**

1. Denotamos por  $M_n^{sim}(\mathbb{K})$  al conjunto formado por las **matrices simétricas** y por  $M_n^{anti}(\mathbb{K})$  al conjunto formado por las **matrices antisimétricas**. Probar que son subespacios vectoriales de  $M_n(\mathbb{K})$  y que  $M_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})^{sim} \oplus M_n^{anti}(\mathbb{K})$ . [Aquí, se supone  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ .]
2. Sea  $SU_n(\mathbb{K})$  el conjunto formado por las matrices cuyo determinante es 1. ¿Es  $SU_n(\mathbb{K})$  un subespacio vectorial de  $M_n(\mathbb{K})$ ?
3. Denotamos por  $M_n^{orto}(\mathbb{R})$  al subconjunto de **matrices ortogonales**, ¿es  $M_n^{orto}(\mathbb{R})$  un subespacio vectorial de  $M_n(\mathbb{R})$ ? (Recordemos que  $A$  se llama ortogonal cuando cumple que  $AA^T = I_n = A^T A$ .)

**Ejercicio 6.** Para cada  $a \in \mathbb{K}$  se considera el subespacio vectorial  $H_a$  de  $\mathbb{K}^3$  de ecuación  $ax - y + z = 0$ . Además, tomamos  $M = L(u)$  siendo  $u = (1, 1, 1)^T \in \mathbb{K}^3$ . ¿Para qué valores de  $a$  se cumple que  $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus M$ ?

**Ejercicio 7.** Se considera la base  $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$  de  $\mathbb{K}[t]_3$  y para cada  $a \in \mathbb{K}$ , el subespacio vectorial  $H_a = \{f \in \mathbb{K}[t]_3 : f(a) = 0\}$ .

1. Hallar una base de  $H_a$  y calcular la dimensión de  $H_a$ . Obtener ecuaciones implícitas y paramétricas de  $H_a$  respecto de  $\mathcal{B}$ .
2. Sean  $a$  y  $b$  dos números reales distintos. Hallar una base de  $H_a \cap H_b$  y calcular su dimensión. Obtener ecuaciones implícitas y paramétricas de  $H_a \cap H_b$  respecto de  $\mathcal{B}$ .
3. Probar que todo polinomio de  $\mathbb{K}[t]_3$  se puede escribir como suma de un polinomio de  $H_a$  y otro de  $H_b$ .

**Ejercicio 8.** En  $\mathbb{K}^3$  se consideran los subespacios

$$U : \begin{cases} x = \lambda + \gamma \\ y = \mu + \gamma \\ z = \lambda + \mu + 2\gamma \end{cases} \quad W : x - y + 2z = 0$$

Se pide:

1. Bases de  $U$ ,  $W$ ,  $U + W$  y  $U \cap W$ .
2. Ecuaciones implícitas de  $U \cap W$ .
3. Una base de un subespacio suplementario de  $U + W$ .
4. Coordenadas de  $(2, 3, 5)^T$  respecto de la base de  $U + W$  obtenida en el primer apartado.

**Ejercicio 9.**

1. Hallar una base y dimensión del subespacio vectorial  $H : x + y = z + t = 0$  de  $\mathbb{K}^4$ .
2. Obtener unas ecuaciones paramétricas de  $H$ .

3. Sea el subespacio  $W = L(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{K}^4$  donde  $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_1 + e_3$  y  $v_3 = e_1 + e_4$ . Hallar unas ecuaciones implícitas de  $H$  y una base de  $W$ .
4. Calcular las dimensiones de  $H \cap W$  y  $H + W$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $n > 2$  un número entero y sean  $H$  y  $L$  dos subespacios de dimensión  $n - 1$  de un espacio vectorial  $E$  de dimensión  $n$ , siendo  $H \neq L$ . Probar que todo vector de  $E$  es suma de un vector de  $H$  y otro de  $L$  y calcular la dimensión que tiene el subespacio intersección  $H \cap L$ .

**Ejercicio 11.**

1. En  $\mathbb{K}_3[x]$  con la base  $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$  se consideran los siguientes subespacios vectoriales

$$U = L(x^2 + 2x, -x^2 + x, x^2 + x) \quad V : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\beta \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Calcular bases, dimensión y ecuaciones (tanto paramétricas como implícitas) de los subespacios  $U, V$  y  $W$ . También para  $U \cap V, U \cap W, V \cap W, U + V, U + W$  y  $V + W$ .

2. Sean los subespacios vectoriales de  $\mathbb{K}^4$ :

$$U = L((1, 1, 0, -1)^T, (1, 2, 3, 0)^T, (2, 3, 3, -1)^T)$$

$$W = L((1, 2, 2, -2)^T, (2, 3, 2, -3)^T, (1, 3, 4, -3)^T)$$

Hallar las dimensiones de  $U + W$  y  $U \cap W$ .

**Ejercicio 12.** Encontrar una base del subespacio  $H : x + y = z - y = 0$  y calcular su dimensión. Prolongar dicha base a una de  $\mathbb{K}^4$ .

**Ejercicio 13.** Si  $1 \leq r \leq n$  y  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$  es una base de  $V$ , demostrar que  $V = U \oplus W$ , donde  $(v_1, \dots, v_r)$  es base de  $U$  y  $(v_{r+1}, \dots, v_n)$  es base de  $W$ . Recíprocamente, si  $V = U \oplus W$ , donde  $(v_1, \dots, v_r)$  es base de  $U$  y  $(v_{r+1}, \dots, v_n)$  es base de  $W$  entonces  $(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$  es base de  $V$ .

### Ejercicio 14.

1. En  $\mathbb{Q}^4$  sean  $H : x - y = z + t = 0$  y  $L \subset \mathbb{Q}^4$  generado por  $(1, -1, 0, 0)^T$ ,  $(1, 0, -1, 0)^T$  y  $(1, 0, 0, -1)^T$ . Hallar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de  $H$ ,  $L$ ,  $H \cap L$  y  $H + L$ .
2. Hallar la dimensión y una base del subespacio  $W \subset \mathbb{Q}^5$  dado por

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - s + 3t = 0 \\ x + 2y + 3z + s + t = 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t = 0. \end{cases}$$

3. Sean los subespacios  $U = L((1, 3, -2, 2, 3)^T, (1, 4, -3, 4, 2)^T, (2, 3, -1, -2, 9)^T)$  y  $W = L((1, 3, 0, 2, 1)^T, (1, 5, -6, 6, 3)^T, (2, 5, 3, 2, 1)^T)$  de  $\mathbb{Q}^5$ . Hallar una base y la dimensión de  $U \cap W$ .
4. Dados los subespacios de  $\mathbb{Q}^4$ ,  $U = L((1, 2, 1, 3)^T, (0, 1, 2, 1)^T, (6, 11, 4, 17)^T)$  y  $W : 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ . Hallar unas ecuaciones paramétricas e implícitas de  $U + W$  y de  $U \cap W$ . ¿Es  $U + W$  una suma directa?
5. Sean  $U, W$  subespacios de  $\mathbb{Q}^3$  definidos por  $U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{Q}^3 : x = y = z\}$  y  $W = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{Q}^3 : x = 0\}$ .

Hallar una base de  $U$ , otra de  $W$  y comprobar que  $\mathbb{Q}^3 = U \oplus W$ .

6. Consideremos los subespacios de  $\mathbb{Q}^4$  dados por  $H : x - y = z + t = 0$  y  $M = L((2, 1, 1, 1)^T, (0, 1, -1, -1)^T, (1, 0, 1, 1)^T)$ . a) Hallar una base de  $H$  y unas ecuaciones implícitas de  $M$ . b) Hallar  $H \cap M$  y  $H + M$ . ¿Es  $H + M$  suma directa? c) Si  $U = L((0, 2, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T)$  hallar  $H + U$  y  $M + U$ . ¿Se trata de sumas directas?
7. Sean  $a$  y  $b$  números racionales y consideremos los subespacios  $U$  y  $W$  de  $\mathbb{Q}^4$

$$U : \begin{cases} bx_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad W : \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- a) Calcular la dimensión de  $U$  y  $W$ . ¿Existen valores de  $a$  y  $b$  para los que  $U = W$ ?
- b) ¿Cómo han de ser  $a$  y  $b$  para que  $U + W \neq \mathbb{Q}^4$ ?

**Ejercicio 15.** En  $\mathbb{Q}^4$  sea el subespacio  $H : x - y + z - 2t = x - 2y + z - t = 0$ . Hallar unas ecuaciones implícitas de un subespacio  $L \subset \mathbb{Q}^4$  tal que  $\mathbb{Q}^4 = L \oplus H$ . Idem  $L' \subset \mathbb{Q}^4$  tal que  $\mathbb{Q}^4 = L' \oplus H$  y  $L \neq L'$ .

### Ejercicio 16.

1. En  $\mathbb{K}^2$  se considera el haz de rectas paralelas a la recta de ecuación  $3x+2y-6=0$ . Identificar la familia anterior con el espacio cociente  $\mathbb{K}^2/U$ , para cierto subespacio  $U$ . Hacer una representación gráfica.
2. En  $\mathbb{K}^3$  se considera el haz de planos paralelos al plano de ecuación  $3x+2y-6=0$ . Identificar la familia anterior con el espacio cociente  $\mathbb{K}^3/U$ , para cierto subespacio  $U$ . Hacer una representación gráfica.
3. En  $\mathbb{K}^3$  se considera el haz de rectas paralelas a la recta de ecuaciones  $x=3, y=7$ . Identificar la familia anterior con el espacio cociente  $\mathbb{K}^3/U$ , para cierto subespacio  $U$ . Hacer una representación gráfica.

### Ejercicio 17.

1. Sean  $V = \mathbb{K}^5$  y  $W : x_4 = x_5 = 0$ . Describe los elementos de  $V/W$ . Halla una base y la dimensión de  $V/W$ .
2. Consideremos en  $\mathbb{K}^4$  los subespacios  $F = L(a, b, c)$  y  $G = L(d, e)$  donde  $a = (1, 2, 3, 4)^T, b = (2, 2, 2, 6)^T, c = (0, 2, 4, 4)^T, d = (1, 0, -1, 2)^T$  y  $e = (2, 3, 0, 1)^T$ . Se pide: a) Determinar las dimensiones de  $F, G, F \cap G, F + G$  y dar una base de cada subespacio. b) Dar sendas bases de los espacios cociente  $\mathbb{K}^4/F$  y  $\mathbb{K}^4/G$ .

### Ejercicio 18.

1. Sean  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ , una base de un espacio vectorial  $E$ ,  $v_1 = u_1 + u_3, v_2 = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$  y  $W = L(v_1, v_2)$ . Se pide:
  - a) Encontrar en  $E$  dos vectores linealmente independientes cuyas clases sean (resp. no sean) linealmente independientes en el cociente  $E/W$ .
  - b) Encontrar cuatro vectores linealmente independientes en  $E$  cuyas clases en  $E/W$  no sumen 0 y de modo que existan vectores proporcionales a ellos cuyas clases sí lo sumen.
2. Sea  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  una base del espacio vectorial  $E$  y consideremos el subespacio vectorial

$$W : \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

- a) Obtener una base de  $E/W$  y, calcular con respecto a ella, las coordenadas de la clase  $[v]_W$  siendo  $v = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ .
- b) Encontrar vectores independientes en  $E \setminus W$  tales que sus clases en  $E/W$  no sean independientes.
- c) Encontrar si es posible (cuatro) vectores linealmente independientes en  $E$  cuyas clases en  $E/W$  no sumen 0 pero de tal modo que existan vectores proporcionales a ellos cuyas clases sí lo sumen.

**Ejercicio 19.** *Una construcción del cuerpo  $\mathbb{C}$ .* Sea

$$U = \{(x^2 + 1)p(x) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Demostrar que  $U$  es un subespacio de  $\mathbb{R}[x]$  y que  $\mathbb{R}[x]/U$  es isomorfo a  $\mathbb{C}$ , como  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales. ¿Qué dimensión tienen? Mediante el isomorfismo anterior, trasladar la multiplicación de  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{R}[x]/U$  y demostrar que  $\mathbb{R}[x]/U$  es un cuerpo.

*Otra construcción del cuerpo  $\mathbb{C}$ .* Sea

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demostrar que  $U$ , como subespacio vectorial de  $M_2(\mathbb{R})$ , es isomorfo a  $\mathbb{C}$ . Demostrar que  $U$  es un cuerpo isomorfo a  $\mathbb{C}$ .