

ÁLGEBRA LINEAL
HOJA 4

Ejercicio 1.

1. Dados tres vectores u_1, u_2, u_3 linealmente independientes en un espacio vectorial E , se consideran los subespacios vectoriales $U = L(u_1 + u_2, u_2 + u_3)$ y $V = L(u_1 + u_2 + u_3, u_2 - u_3)$. ¿Cuál es la dimensión de $U \cap V$?
2. En \mathbb{K}^3 se consideran los subespacios vectoriales

$$U : x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$W = L((1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (-1, -1, 1)^T)$$

- a) Calcular unas ecuaciones paramétricas, la dimensión y una base de U .
 - b) Calcular unas ecuaciones implícitas, la dimensión y una base de W .
 - c) Determinar los subespacios vectoriales $U \cap W$ y $U + W$.
3. En $M_2(\mathbb{K})$ se consideran los subespacios vectoriales

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a - b & a + b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{K} \right\}, \quad V_2 : \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ 2a - c - d = 0 \end{cases}$$

donde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Calcular unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implícitas, una base y la dimensión de los subespacios $V_1 \cap V_2$ y $V_1 + V_2$.

4. En \mathbb{K}^4 se consideran los subespacios vectoriales

$$U = L((1, -1, 2, 1)^T, (0, 1, -1, 3)^T, (2, 0, 1, -1)^T)$$

$$W : \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - 2y + 6z - 6t = 0 \end{cases}$$

Calcular la dimensión, una base y ecuaciones paramétricas e implícitas de $U, W, U \cap W$ y $U + W$.

5. En \mathbb{K}^4 se consideran los subespacios vectoriales $U : y + z + t = 0$ y $W : x + y = z - 2t = 0$. Hallar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de $U, W, U \cap W$ y $U + W$.

Ejercicio 2. Sean $a, b \in \mathbb{K}$ y consideremos los subespacios

$$H : \begin{cases} bx_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad L : \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Calcular las dimensiones de H y L .
2. ¿Existen valores de a y b para los que $H = L$?
3. ¿Cómo deben tomarse a y b para que $H \neq L$ y $H + L \neq \mathbb{K}^4$?

Ejercicio 3. Sea U el subespacio de \mathbb{K}^3 de ecuaciones implícitas $x + y + z = 0 = z$. Determina un subespacio V de \mathbb{K}^3 de forma que $U \cap V = \{0\}$ y $U + V$ tenga por ecuación cartesiana $x + y + z = 0$.

Ejercicio 4. Sean F, G, H , subespacios del espacio vectorial E . Demostrar o dar contraejemplos de las afirmaciones siguientes:

1. $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$, (indicación: es falsa)
2. $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$, (indicación: es verdadera)
3. $\dim(F \cap (G + H)) = \dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(F \cap H \cap G)$, (indicación: es falsa).

Ejercicio 5.

1. Denotamos por $M_n^{sim}(\mathbb{K})$ al conjunto formado por las **matrices simétricas** y por $M_n^{anti}(\mathbb{K})$ al conjunto formado por las **matrices antisimétricas**. Probar que son subespacios vectoriales de $M_n(\mathbb{K})$ y que $M_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})^{sim} \oplus M_n^{anti}(\mathbb{K})$. [Aquí, se supone $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$.]
2. Sea $SU_n(\mathbb{K})$ el conjunto formado por las matrices cuyo determinante es 1. ¿Es $SU_n(\mathbb{K})$ un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{K})$?
3. Denotamos por $M_n^{orto}(\mathbb{R})$ al subconjunto de **matrices ortogonales**, ¿es $M_n^{orto}(\mathbb{R})$ un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$? (Recordemos que A se llama ortogonal cuando cumple que $AA^T = I_n = A^T A$.)

Ejercicio 6. Para cada $a \in \mathbb{K}$ se considera el subespacio vectorial H_a de \mathbb{K}^3 de ecuación $ax - y + z = 0$. Además, tomamos $M = L(u)$ siendo $u = (1, 1, 1)^T \in \mathbb{K}^3$. ¿Para qué valores de a se cumple que $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus M$?

Ejercicio 7. Se considera la base $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$ de $\mathbb{K}[t]_3$ y para cada $a \in \mathbb{K}$, el subespacio vectorial $H_a = \{f \in \mathbb{K}[t]_3 : f(a) = 0\}$.

1. Hallar una base de H_a y calcular la dimensión de H_a . Obtener ecuaciones implícitas y paramétricas de H_a respecto de \mathcal{B} .
2. Sean a y b dos números reales distintos. Hallar una base de $H_a \cap H_b$ y calcular su dimensión. Obtener ecuaciones implícitas y paramétricas de $H_a \cap H_b$ respecto de \mathcal{B} .
3. Probar que todo polinomio de $\mathbb{K}[t]_3$ se puede escribir como suma de un polinomio de H_a y otro de H_b .

Ejercicio 8. En \mathbb{K}^3 se consideran los subespacios

$$U : \begin{cases} x = \lambda + \gamma \\ y = \mu + \gamma \\ z = \lambda + \mu + 2\gamma \end{cases} \quad W : x - y + 2z = 0$$

Se pide:

1. Bases de U , W , $U + W$ y $U \cap W$.
2. Ecuaciones implícitas de $U \cap W$.
3. Una base de un subespacio suplementario de $U + W$.
4. Coordenadas de $(2, 3, 5)^T$ respecto de la base de $U + W$ obtenida en el primer apartado.

Ejercicio 9.

1. Hallar una base y dimensión del subespacio vectorial $H : x + y = z + t = 0$ de \mathbb{K}^4 .
2. Obtener unas ecuaciones paramétricas de H .

3. Sea el subespacio $W = L(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{K}^4$ donde $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_1 + e_3$ y $v_3 = e_1 + e_4$. Hallar unas ecuaciones implícitas de H y una base de W .
4. Calcular las dimensiones de $H \cap W$ y $H + W$.

Ejercicio 10. Sea $n > 2$ un número entero y sean H y L dos subespacios de dimensión $n - 1$ de un espacio vectorial E de dimensión n , siendo $H \neq L$. Probar que todo vector de E es suma de un vector de H y otro de L y calcular la dimensión que tiene el subespacio intersección $H \cap L$.

Ejercicio 11.

1. En $\mathbb{K}_3[x]$ con la base $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$ se consideran los siguientes subespacios vectoriales

$$U = L(x^2 + 2x, -x^2 + x, x^2 + x) \quad V : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\beta \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases} \quad W : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Calcular bases, dimensión y ecuaciones (tanto paramétricas como implícitas) de los subespacios U, V y W . También para $U \cap V, U \cap W, V \cap W, U + V, U + W$ y $V + W$.

2. Sean los subespacios vectoriales de \mathbb{K}^4 :

$$U = L((1, 1, 0, -1)^T, (1, 2, 3, 0)^T, (2, 3, 3, -1)^T)$$

$$W = L((1, 2, 2, -2)^T, (2, 3, 2, -3)^T, (1, 3, 4, -3)^T)$$

Hallar las dimensiones de $U + W$ y $U \cap W$.

Ejercicio 12. Encontrar una base del subespacio $H : x + y = z - y = 0$ y calcular su dimensión. Prolongar dicha base a una de \mathbb{K}^4 .

Ejercicio 13. Si $1 \leq r \leq n$ y $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ es una base de V , demostrar que $V = U \oplus W$, donde (v_1, \dots, v_r) es base de U y (v_{r+1}, \dots, v_n) es base de W . Recíprocamente, si $V = U \oplus W$, donde (v_1, \dots, v_r) es base de U y (v_{r+1}, \dots, v_n) es base de W entonces $(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ es base de V .

Ejercicio 14.

1. En \mathbb{Q}^4 sean $H : x - y = z + t = 0$ y $L \subset \mathbb{Q}^4$ generado por $(1, -1, 0, 0)^T$, $(1, 0, -1, 0)^T$ y $(1, 0, 0, -1)^T$. Hallar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de H , L , $H \cap L$ y $H + L$.
2. Hallar la dimensión y una base del subespacio $W \subset \mathbb{Q}^5$ dado por

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - s + 3t = 0 \\ x + 2y + 3z + s + t = 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t = 0. \end{cases}$$

3. Sean los subespacios $U = L((1, 3, -2, 2, 3)^T, (1, 4, -3, 4, 2)^T, (2, 3, -1, -2, 9)^T)$ y $W = L((1, 3, 0, 2, 1)^T, (1, 5, -6, 6, 3)^T, (2, 5, 3, 2, 1)^T)$ de \mathbb{Q}^5 . Hallar una base y la dimensión de $U \cap W$.
4. Dados los subespacios de \mathbb{Q}^4 , $U = L((1, 2, 1, 3)^T, (0, 1, 2, 1)^T, (6, 11, 4, 17)^T)$ y $W : 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Hallar unas ecuaciones paramétricas e implícitas de $U + W$ y de $U \cap W$. ¿Es $U + W$ una suma directa?
5. Sean U, W subespacios de \mathbb{Q}^3 definidos por $U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{Q}^3 : x = y = z\}$ y $W = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{Q}^3 : x = 0\}$.

Hallar una base de U , otra de W y comprobar que $\mathbb{Q}^3 = U \oplus W$.

6. Consideremos los subespacios de \mathbb{Q}^4 dados por $H : x - y = z + t = 0$ y $M = L((2, 1, 1, 1)^T, (0, 1, -1, -1)^T, (1, 0, 1, 1)^T)$. a) Hallar una base de H y unas ecuaciones implícitas de M . b) Hallar $H \cap M$ y $H + M$. ¿Es $H + M$ suma directa? c) Si $U = L((0, 2, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T)$ hallar $H + U$ y $M + U$. ¿Se trata de sumas directas?
7. Sean a y b números racionales y consideremos los subespacios U y W de \mathbb{Q}^4

$$U : \begin{cases} bx_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad W : \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

- a) Calcular la dimensión de U y W . ¿Existen valores de a y b para los que $U = W$?
- b) ¿Cómo han de ser a y b para que $U + W \neq \mathbb{Q}^4$?

Ejercicio 15. En \mathbb{Q}^4 sea el subespacio $H : x - y + z - 2t = x - 2y + z - t = 0$. Hallar unas ecuaciones implícitas de un subespacio $L \subset \mathbb{Q}^4$ tal que $\mathbb{Q}^4 = L \oplus H$. Idem $L' \subset \mathbb{Q}^4$ tal que $\mathbb{Q}^4 = L' \oplus H$ y $L \neq L'$.

Ejercicio 16.

1. En \mathbb{K}^2 se considera el haz de rectas paralelas a la recta de ecuación $3x+2y-6=0$. Identificar la familia anterior con el espacio cociente \mathbb{K}^2/U , para cierto subespacio U . Hacer una representación gráfica.
2. En \mathbb{K}^3 se considera el haz de planos paralelos al plano de ecuación $3x+2y-6=0$. Identificar la familia anterior con el espacio cociente \mathbb{K}^3/U , para cierto subespacio U . Hacer una representación gráfica.
3. En \mathbb{K}^3 se considera el haz de rectas paralelas a la recta de ecuaciones $x=3, y=7$. Identificar la familia anterior con el espacio cociente \mathbb{K}^3/U , para cierto subespacio U . Hacer una representación gráfica.

Ejercicio 17.

1. Sean $V = \mathbb{K}^5$ y $W : x_4 = x_5 = 0$. Describe los elementos de V/W . Halla una base y la dimensión de V/W .
2. Consideremos en \mathbb{K}^4 los subespacios $F = L(a, b, c)$ y $G = L(d, e)$ donde $a = (1, 2, 3, 4)^T, b = (2, 2, 2, 6)^T, c = (0, 2, 4, 4)^T, d = (1, 0, -1, 2)^T$ y $e = (2, 3, 0, 1)^T$. Se pide: a) Determinar las dimensiones de $F, G, F \cap G, F + G$ y dar una base de cada subespacio. b) Dar sendas bases de los espacios cociente \mathbb{K}^4/F y \mathbb{K}^4/G .

Ejercicio 18.

1. Sean $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, una base de un espacio vectorial E , $v_1 = u_1 + u_3, v_2 = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$ y $W = L(v_1, v_2)$. Se pide:
 - a) Encontrar en E dos vectores linealmente independientes cuyas clases sean (resp. no sean) linealmente independientes en el cociente E/W .
 - b) Encontrar cuatro vectores linealmente independientes en E cuyas clases en E/W no sumen 0 y de modo que existan vectores proporcionales a ellos cuyas clases sí lo sumen.
2. Sea $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ una base del espacio vectorial E y consideremos el subespacio vectorial

$$W : \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

- a) Obtener una base de E/W y, calcular con respecto a ella, las coordenadas de la clase $[v]_W$ siendo $v = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.
- b) Encontrar vectores independientes en $E \setminus W$ tales que sus clases en E/W no sean independientes.
- c) Encontrar si es posible (cuatro) vectores linealmente independientes en E cuyas clases en E/W no sumen 0 pero de tal modo que existan vectores proporcionales a ellos cuyas clases sí lo sumen.

Ejercicio 19. *Una construcción del cuerpo \mathbb{C} .* Sea

$$U = \{(x^2 + 1)p(x) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Demostrar que U es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$ y que $\mathbb{R}[x]/U$ es isomorfo a \mathbb{C} , como \mathbb{R} -espacios vectoriales. ¿Qué dimensión tienen? Mediante el isomorfismo anterior, trasladar la multiplicación de \mathbb{C} a $\mathbb{R}[x]/U$ y demostrar que $\mathbb{R}[x]/U$ es un cuerpo.

Otra construcción del cuerpo \mathbb{C} . Sea

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demostrar que U , como subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, es isomorfo a \mathbb{C} . Demostrar que U es un cuerpo isomorfo a \mathbb{C} .