# ÁLGEBRA LINEAL
# HOJA 5

**Ejercicio 1.** Definimos la **aplicación derivada** de $\mathbb{K}_n[x] \to \mathbb{K}_{n-1}[x]$ que asigna a cada polinomio $p(x)$, su polinomio derivado, $p'(x)$. Probar que la aplicación derivada es lineal.

**Ejercicio 2.** Si $X = X_1 \oplus X_2$, entonces cada vector $x$ de $X$ se puede escribir (de modo único) como $x = x_1 + x_2$ siendo $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Pruébese que la aplicación $x \mapsto x_1$ es lineal.

**Ejercicio 3.** a) ¿Existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$ tal que

$$f((1,0)^T) = (1,1)^T,\ f((3,2)^T) = (1,-1)^T\ f((3,3)^T) = (2,2)^T?$$

b) Dados los vectores $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{K}^n$ y $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{K}^m$, ¿qué condiciones deben cumplirse para que exista una única aplicación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ tal que $f(u_i) = v_i$, para $i = 1, \ldots, s$?

**Ejercicio 4.** Sea $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ una aplicación lineal tal que

$$f(e_1) = u_1 + u_2 \qquad f(e_2) = 2u_1 - u_2 \qquad f(e_3) = 3u_1 + 2u_2 \qquad f(e_4) = u_1 + 2u_2$$

donde $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ y $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ son unas bases de $\mathbb{K}^4$ y $\mathbb{K}^3$, respectivamente. Determinar la matriz de $f$ con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

**Ejercicio 5.** Una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo se llama *endomorfismo*. Sea $f : V \to V$ un endomorfismo y sean $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ y $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$, dos bases de $V$. Si $f(u_i) = v_i$ para todo $i = 1 \ldots n$, probar que la matriz de $f$ respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es la identidad, $I_n$.

**Ejercicio 6.** Consideramos un endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ de la forma $f((x_1, x_2, x_3)^T) = (x_1', x_2', x_3')^T$. Hallar la matriz del endomorfismo y unas ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y de la imagen en los siguientes casos:

a) $x_1' = x_1 + x_2 + x_3, \quad x_2' = x_1 - x_2 + x_3, \quad x_3' = x_1 + x_3.$

b) $x_1' = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad x_2' = 2x_1 + x_2 + x_3, \quad x_3' = -x_1 + x_2 + 2x_3.$

En cada caso indica si $f$ es inyectiva o sobreyectiva.

**Ejercicio 7.** Comprobar que la aplicación $f : \mathbb{K}[x]_3 \to \mathbb{K}$ dada por $f(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$, es lineal. Calcular su matriz asociada respecto de las bases $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{K}[x]_3$ y 1 de $\mathbb{K}$.

**Ejercicio 8.** Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ el endomorfismo definido por $f((x_1, x_2, ..., x_n)^T) = (x_1, x_2, ..., x_k, 0, ..., 0)^T$ con $k < n$. Determinar el núcleo y la imagen de $f$.

**Ejercicio 9.** Sea $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ un endomorfismo tal que $f((1,0,1,0)^T) = (2,1,-1,0)^T$, $f((0,1,-1,0)^T) = (0,-1,1,0)^T$ y $\ker f : x + z = 0 = x - y + t$.

1. Hallar la matriz de $f$ respecto de la base canónica.
2. Hallar una base y la dimensión de $\mathbb{K}^4/\ker f$ y describir las clases de equivalencia.

**Ejercicio 10.** Sea $f$ el endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ definido por $y_1 = 3x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = -x_1 + 4x_2 - 2x_3$, $y_3 = 2x_1 + 6x_2 - x_3$. Se pide:

a) Calcular $\ker f$.

b) Una base de un subespacio $W$ de $\mathbb{K}^3$ suplementario de $\ker f$ (es decir, $\ker f \oplus W = \mathbb{K}^3$).

c) Comprobar que la imagen por $f$ de la base calculada en b) es una base de $\mathrm{Im} f$.

**Ejercicio 11.** En $\mathbb{K}^3$ se considera el endomorfismo dado por

$$f((1,1,1)^T) = (2,3,3)^T \qquad f((1,1,0)^T) = (1,3,2)^T \qquad f((1,0,0)^T) = (0,1,1)^T.$$

a) Calcular la matriz de $f$ respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^3$.

b) Hallar la dimensión y una base del núcleo y la imagen de $f$.

c) Obtener la matriz de $f$ respecto de la base $\mathcal{B}' = ((1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (1,0,0)^T)$.

**Ejercicio 12.** a) Demostrar que $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$ es una base de $\mathbb{K}[x]_3$.

b) Hallar, respecto de $\mathcal{B}$, la matriz del endomorfismo $f$ que a cada polinomio de $\mathbb{K}[x]_3$ le hace corresponder su derivada segunda.

c) Hallar los subespacios $\ker f$ e $\mathrm{im} f$ y su dimensión.

d) Resolver con matrices la ecuación $f(q(x)) = 6x + 8$, donde $q(x) \in \mathbb{K}[x]_3$.

**Ejercicio 13.** Prueba las siguientes propiedades de una aplicación lineal $f : V \to V'$.

a) Si $u_1, \ldots, u_n \in V$ son linealmente dependientes, entonces $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ son linealmente dependientes.

b) Si $f$ es inyectiva y si $u_1, \ldots, u_n \in V$ son linealmente independientes, entonces $f(u_1), \ldots, f(u_n)$ son linealmente independientes.

**Ejercicio 14.** Sea $f : \mathbb{K}[x]_3 \to \mathbb{K}[x]_2$ la aplicación lineal que a cada polinomio $p(x)$ le hace corresponder $f(p(x)) = p'(x) - p''(x)$ . Hallar la matriz de $f$ respecto de las bases canónicas y calcular matricialmente $f(q(x))$ siendo $q(x) = x^3 + 3x^2 + 7x - 6$.

**Ejercicio 15.** Supóngase que la aplicación lineal $f : V \to U$ es inyectiva y suprayectiva. Probar que la aplicación inversa $f^{-1} : U \to V$ es también lineal.

**Ejercicio 16.** ¿Qué se puede decir de una aplicación lineal $f : V \to \mathbb{C}$ de espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ tal que toma solo valores reales?

**Ejercicio 17.** a) ¿Hay algún endomorfismo de $\mathbb{K}^{2n+1}$ tal que el núcleo y la imagen coincidan?

b) ¿Existen espacios vectoriales $U$ y $V$, con $V$ de dimensión impar, y aplicaciones lineales $f : U \to V$ inyectiva y $g : V \to U$ sobreyectiva tales que $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$?

**Ejercicio 18.** En $\mathbb{K}^3$ se consideran los subespacios $U = L((1,1,1)^T)$ y $W : x + y + z = 0$. Determinar todos los endomorfismos $f$ de $\mathbb{K}^3$ tales que $\ker f = U$ e $\mathrm{im} f = W$ y decir cuáles de ellos son proyectores (i.e., satisfacen $f^2 = f$).

**Ejercicio 19.** Hallar la matriz asociada a cada los siguientes endomorfismos de $\mathbb{K}^2$,

$$f((x,y)^T) = (2y, 3x - y)^T, \quad g((x,y)^T) = (3x - 4y, x + 5y)^T,$$

con respecto de la base canónica: Hallar las matrices asociadas a $f$ y a $g$ respecto de la base $\mathcal{B} = ((1,3)^T, (2,5)^T)$.

**Ejercicio 20.** Sean $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ bases, respectivamente, de los $\mathbb{K}$–espacios vectoriales $V$ y $V'$, y $f : V \to V'$ la aplicación lineal que cumple

$$f(v_1) = 2u_1 + u_2 - u_3; \quad f(v_2) = u_1 - u_2 - 2u_3; \quad f(v_3) = 2u_1 - 2u_2 + 4u_3; \quad f(v_4) = u_1 - u_3$$

a) Comprobar que $\mathcal{B}'' = (f(v_1), f(v_2), f(v_3))$ es una base de $V'$.

b) Hallar las matrices de $f$ respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ y respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}''$ y la relación entre ellas.

**Ejercicio 21.** Sean $f : \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^3$ y $g : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^4$ las aplicaciones lineales definidas por

$$f((x, y, z, t)^T) = (x + y, x + 3y + 2z, x + y)^T \quad \text{y}$$

$$g((x, y, z)^T) = (x + y + 2z, x + y + 2z, 2x + 2y + 4z, -3x - 3y - 6z)^T.$$

Sean $h_1 = f \circ g$ y $h_2 = g \circ f$.

a) Hallar las matrices de $f$, $g$, $h_1$ y $h_2$ respecto de las bases canónicas.

b) Hallar las matrices de $f$, $g$, $h_1$ y $h_2$ respecto de las bases $\mathcal{B} = ((3, 2, 5)^T, (2, 1, 3)^T, (1, 0, 2)^T)$ y $\mathcal{B}' = ((1, 0, 2, 1)^T, (0, -1, 2, 1)^T, (0, 0, 1, 1)^T, (0, 0, 0, -1)^T)$ de $\mathbb{K}^3$ y $\mathbb{K}^4$, respectivamente.

**Ejercicio 22.** Sean $f$ y $g$ dos endomorfismos de un espacio vectorial $V$. Se pide:

a) Probar que si $f \circ g = 0$ (aplicación que lleva a todos los vectores al vector cero), entonces $\mathrm{img} \subset \ker f$.

b) Si además $g$ es sobreyectiva, demostrar que $f$ es nula.

c) Si $f \circ g = 0$ y además $f$ es inyectiva, demostrar que $g$ es nula.

e) Dar un ejemplo en el que $f \circ g = 0$, $\mathrm{img} \subset \ker f$ y el contenido en el otro sentido no se verifica.

**Ejercicio 23.** Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Sea $f : M_2(\mathbb{K}) \to M_2(\mathbb{K})$ la aplicación definida por $f(X) = AX - XA$ para $X \in M_2(\mathbb{K})$.

a) Probar que $f$ es lineal y calcular la matriz de $f$ respecto de la base estandar de $M_2(\mathbb{K})$, dada por $(B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$, donde $B_{ij}$ es la matriz que tiene un 1 en la entrada $(i, j)$ y ceros en el resto.

b) Calcular el núcleo y la imagen de $f$.

**Ejercicio 24.** Se considera la aplicación $f : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$ dada por

$$f(A) = A - A^T.$$

Probar que $f$ es una aplicación lineal y calcular $\ker(f), \mathrm{im}(f), \ker(f) \cap \mathrm{im}(f)$ y $\ker(f) + \mathrm{im}(f)$