ÁLGEBRA LINEAL
HOJA 7

Recuerda que $\det A = \prod_\lambda \lambda$ y $\operatorname{tr} A = \sum_\lambda \lambda$, donde A es matriz cuadrada y el producto y la suma están extendidos a los autovalores λ de A.

Ejercicio 1. Probar que si $A \in M_2(\mathbb{K})$, entonces $P_A(T) = T^2 - \operatorname{tr}(A)T + \det(A)$.

Ejercicio 2. Demostrar que si A y B son matrices cuadradas del mismo orden entonces AB y BA tienen el mismo polinomio característico. [1]

Ejercicio 3. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita V sobre $\mathbb{K}$. Demostrar:

1. f es un isomorfismo si y sólo si 0 no es autovalor de f.
2. λ es autovalor de f si y sólo si $-\lambda$ lo es de $-f$.
3. Si λ es autovalor de f, entonces, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, λ^k lo es de f^k.
4. Si λ^2 es autovalor de f^2, entonces bien λ, o bien $-\lambda$ lo es de f.
5. Si f es un **proyector** (i.e., $f^2 = f$), entonces f no posee autovalores distintos de 0 y 1. Si f es **involutivo** (i.e., $f^2 = \mathrm{id}$), entonces f no posee autovalores distintos de ± 1. Si f es **nilpotente** (i.e., existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = 0$) entoces su único autovalor es el cero.
6. f y $f - a\,\mathrm{id}$ tienen los mismos autovectores, para todo $a \in \mathbb{K}$. Describe la relación entre los autovalores de ambos endomorfismos.
7. Si $v \in V$ es autovector de f, entonces también lo es de f^k, para todo $k \in \mathbb{N}$, y de $p(f)$, para todo polinomio p con coeficientes en $\mathbb{K}$. [Indicación: $f^0 = \mathrm{id}$, por convenio.]
8. Si f es una **isometría**, entonces sus autovalores reales tienen módulo 1. [2]

---

[1] Se puede demostrar que si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ con $m \geq n$, entonces el polinomio característico de AB es el producto de $(-T)^{m-n}$ por el polinomio característico de BA.

[2] Se puede demostrar que sus autovalores complejos también tienen módulo 1.

Ejercicio 4. Halla la matriz respecto de la base canónica del endomorfismo de $\mathbb{K}^4$ tal que $f((1,0,1,0)^T) = (2,1,-1,0)^T$, $L((0,1,-1,0)^T)$ sea el subespacio de vectores propios de f para el valor propio -1 y $H : x + z = x - y + t = 0$ sea el subespacio de vectores propios de f para el valor propio 2.

Ejercicio 5. (Nuevo)Demuestra que toda matriz de rango menor o igual que uno es diagonalizable. [Indicación: cada matriz de rango uno se escribe como producto de columna C por fila F. El determinante de $CF + D$ se ha calculado en ejercicio previo, donde D es matriz diagonal].

Ejercicio 6. Halla el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios de las siguiente matrices. ¿Cuáles pueden diagonalizarse?

$$a) \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \ b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ c) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \ d) \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 7. Halla los valores propios y los vectores propios correspondientes de las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, consideradas como matrices sobre $\mathbb{R}$, o matrices sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 8.

1. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^2$ no diagonalizable de traza 2. Calcular $\det f$.
2. ¿Es diagonalizable una matriz cuadrada de orden dos con traza 5 y determinante 4?

Ejercicio 9. ¿Para qué valores de a y b es diagonalizable la matriz $A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 2 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$?
Para los valores tales que $A_{a,b}$ no es diagonalizable, halla la matriz $J_{a,b}$ de Jordan y la matriz de paso.

Ejercicio 10.

1. Sean las expresiones recurrentes $\left.\begin{array}{rl} u_n = & 3u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ v_n = & 5u_{n-1} + v_{n-1} \end{array}\right\}$ con $u_0 = v_0 = 1$. Halla u_n y v_n en función de n.

2. En un criadero de conejos sean y_n e x_n el número de machos y hembras al cabo de n años, respectivamente. Sabiendo que $\left.\begin{array}{rl} x_{n+1} = & 5x_n - 3y_n \\ y_{n+1} = & 6x_n - 4y_n \end{array}\right\}$ y que $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, halla el número total de conejos al cabo de 20 años.

Ejercicio 11. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$. Encontrar la expresión de la potencia n–ésima de la matriz A en función de n. Hallar $\exp(A)$.

Ejercicio 12. Sean f y g endomorfismos de $\mathbb{C}^4$ y $W : x + y - z - t = x + z + t = 0$ subespacio que satisfacen las siguientes 9 hipótesis:

1. W es invariante por f, f no es diagonalizable, $f(u) = v$, $f(v) = u$ para $u = (1,1,0,0)^T$ y $v = (0,1,1,0)^T$ y $\mathrm{tr}(f) = 2$,

2. $f \circ g = g \circ f$ y $f_{|W} = g_{|W}$,

3. $\mathrm{tr}(g) = 4$ y $\det(g) = 1$.

Calcula las matrices de Jordan de f y g.

Ejercicio 13.

1. Escribe todas las matrices de Jordan en $M_n(\mathbb{C})$ para $n = 2, 3, 4$.

2. Prueba que si λ es autovalor de una matriz nilpotente, entonces $\lambda = 0$.

3. Halla todas las matrices de Jordan asociadas a las matrices nilpotentes de $M_5(\mathbb{C})$.

Ejercicio 14. Para $n \geq 2$ determina la matriz de Jordan de

1. la **matriz circulante** de tamaño n siguiente $C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

2. J_n, la matriz todo unos de tamaño n.

Ejercicio 15. Supongamos que respecto de cierta base $\mathcal{B}$, la matriz de Jordan de un endomorfismo f es J. Explíquese cómo modificar $\mathcal{B}$ para que la matriz de f respecto de la nueva base sea J^T.

Ejercicio 16.

1. Sea la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_n$ definida como $f(p(X)) = p'(X)$. Halla una base de $\mathbb{R}[X]_n$ respecto de la cual la matriz de f sea de Jordan.
2. Para $n = 4$ sea la aplicación $g\colon \mathbb{R}[X]_n \to \mathbb{R}[X]_n$ definida como $g(p(X)) = p(X+1)$. Comprueba que g es lineal. Halla la matriz de Jordan J de g y una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}[X]_n$ tal que J sea la matriz de g con respecto $\mathcal{B}$.

Ejercicio 17. Una matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ se dice **estocástica** si $a_{ij} \geq 0, \forall i,j$ y $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \forall j$. Demuestra que toda matriz estocástica tiene al 1 por autovalor y posee vectores fijos no nulos.

Ejercicio 18. Consideramos la población de cierto país dividida en tres clases: alta, media y baja. Las probabilidades de que una persona cambie de clase o no al cabo de un año dependen solo de la clase a la que ha pertenecido durante el año y son las mismas todos los años. Concretamente

- la probabilidad de seguir siendo de clase alta es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase media si se era de clase alta es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase baja si se era de clase alta es 0;
- la probabilidad de pasar a ser de clase alta si se era de clase media es $1/4$;
- la probabilidad de seguir siendo de clase media es $1/2$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase baja si se era de clase media es $1/4$;
- la probabilidad de pasar a ser de clase alta si era de clase baja es 0;
- la probabilidad de pasar a ser de clase media si se era de clase baja es $1/2$;

– la probabilidad de seguir siendo de clase baja es $1/2$.

La **matriz de transición** para este proceso (llamado **cadena de Markov**) es

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

y sirve para estudiar la evolución del proceso. Si el número de habitantes de clase alta en el año n es a_n, el de clase media es m_n y el de clase baja es b_n, entonces

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ m_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ m_n \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1. Calcula los autovalores y los autovectores de A. ¿ Es A diagonalizable?
2. Halla A^n para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Supongamos que este año el país tiene 16 millones de habitantes, de los cuales $0,5$ millones son de clase alta, 13 millones son de clase media y $2,5$ millones son de clase baja. ¿Cuál será el número de habitantes pertenecientes a cada clase al cabo de 20 años?
4. Con los mismos datos iniciales del apartado anterior, cuando pase mucho, mucho tiempo, ¿a qué cantidades tenderá el número de habitantes pertenecientes a cada clase?
5. ¿Existe alguna distribución de la población (expresada como un vector con coordenadas entre 0 y 1, ya que lo que nos interesan son los porcentajes) que no varíe a lo largo del tiempo? Si existe, ¿cuál es?