

# ÁLGEBRA LINEAL

## HOJA 8

Nomenclatura:

- el **producto escalar** de dos vectores  $u, v$  se denota  $\langle u, v \rangle$  (otras notaciones son  $u \cdot v$  ó  $\psi(u, v)$ );
- el **producto vectorial** de vectores  $u, v \in \mathbb{R}^3$  se denota  $u \wedge v$  (ó  $u \times v$ ).
- dados espacios vectoriales euclídeos  $(V, \langle, \rangle)$  y  $(V', \langle, \rangle')$ , una **isometría** de  $V$  en  $V'$  es una aplicación lineal  $f : (V, \langle, \rangle) \rightarrow (V', \langle, \rangle')$  tal que  $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle f(v_1), f(v_2) \rangle', \forall v_1, v_2$  (otra denominación es **aplicación lineal ortogonal**);
- dado un espacio vectorial euclídeo  $(V, \langle, \rangle)$  un endomorfismo  $f$  de  $V$  se dice **simétrico** si  $\langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle, \forall v_1, v_2$  (otra denominación es **endomorfismo autoadjunto**);
- una **simetría lineal** (o **reflexión lineal**) es una isometría involutiva de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo, es decir una isometría  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $s^2 = \text{id}$ ;
- una **rotación lineal** (o **giro lineal**) en  $\mathbb{R}^2$  está determinada por un centro (que es el origen de coordenadas), una amplitud  $\alpha \in [0, 2\pi)$  y un sentido (positivo o negativo);
- una **rotación lineal axial** (o **giro lineal axial**) en  $\mathbb{R}^3$  está determinada por un vector, una amplitud  $\alpha \in [0, 2\pi)$ ; el vector determina un eje de giro y un sentido de giro;
- Una **roto-simetría** en  $\mathbb{R}^3$  es la composición (conmutativa) de una rotación axial y una simetría, cuando el eje de rotación y el plano de simetría son mutuamente ortogonales.

En el futuro veremos simetrías y rotaciones afines.

### Ejercicio 1.

1. Da un ejemplo en el que  $\langle u, v \rangle w \neq u \langle v, w \rangle$ .
2. Determina si las siguientes aplicaciones  $\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  son productos escalares y para aquellos que lo sean, encuentra una base ortonormal de  $\mathbb{R}^2$ .

a)  $\langle (x, y)^T, (x', y')^T \rangle = 2xx' + 3xy' + 3x'y + 5yy'$ ,

$$b) \langle (x, y)^T, (x', y')^T \rangle = 9xx' + 6xy' + 3x'y + 4yy',$$

$$c) \langle (x, y)^T, (x', y')^T \rangle = \sqrt{x^2(x')^2} + \sqrt{y^2(y')^2},$$

$$d) \langle (x, y)^T, (x', y')^T \rangle = 9xx' + 6xy' + 6x'y + 4yy',$$

$$e) \langle (x, y)^T, (x', y')^T \rangle = xx' + xy' + x'y,$$

**Ejercicio 2. Las diagonales de un rombo son perpendiculares.** Si  $u$  y  $v$  son vectores de un espacio vectorial euclídeo tales que  $\|u\| = \|v\|$ , probar que los vectores  $u+v$  y  $u-v$  son ortogonales. (Un **rombo** es un paralelogramo todos cuyos lados tienen la misma longitud).

**Ejercicio 3. Teorema del coseno.** Utilizando el producto escalar usual, demostrar que Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los lados de un triángulo y  $\alpha$  el ángulo formado por los lados  $b$  y  $c$  entonces  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ . Busca los enunciados del **teorema del seno** y el **teorema de la tangente**.

**Ejercicio 4.** Sea  $V$  un espacio vectorial euclídeo y sean  $U, U_1$  y  $U_2$  subespacios de  $V$ . Demostrar:

1.  $\{0\}^\perp = V$  y  $\{0\} = V^\perp$ ,
2.  $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$ ,
3.  $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ ,
4.  $U_1^\perp + U_2^\perp \subseteq (U_1 \cap U_2)^\perp$ , con igualdad cuando la dimensión de  $V$  es finita
5. Si  $f : (V, \langle, \rangle) \rightarrow (V', \langle, \rangle')$  es una isometría, entonces  $f(U^\perp) \subseteq f(U)^\perp$ , con igualdad cuando la dimensión de  $V$  es finita.
6. ¿qué relación hay entre  $U$  y  $U^{\perp\perp}$ ?

**Ejercicio 5.**

1. En  $M_n(\mathbb{R})$  se considera el producto escalar  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$ . Hallar la matriz (de Gram) respecto de la base de  $M_3(\mathbb{R})$  formada por las matrices  $A_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) cuyas entradas son todas 0 excepto la entrada  $(i, j)$ , que vale 1. Generalizar a  $M_n(\mathbb{R})$ . Además, hallar el ortogonal del subespacio formado por las matrices simétricas.

- Hallar la matriz (de Gram) del producto escalar usual de  $\mathbb{R}^3$  respecto de la base  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 1, 1)^T)$ .  
Idem respecto de la base  $\mathcal{B}' = ((1, 1, 2)^T, (3, 1, 1)^T, (-2, -1, 2)^T)$ .
- En  $\mathbb{R}[x]_2$  se considera el producto escalar definido por  $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x) dx$ . Hallar la matriz (de Gram) este producto escalar respecto de la base estándar  $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ .  
Comprobar que  $p = x - 1$  y  $q = 3x - 1$  son ortogonales.  
Hallar  $L(p)^\perp$ , i.e., todos los polinomios de  $\mathbb{R}[x]_2$  que son ortogonales a  $p$ .
- En un espacio vectorial euclídeo  $V$  de dimensión 3, un producto escalar tiene matriz (de Gram)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  respecto de cierta base  $\mathcal{B}$ . Si  $U$  es el subespacio de ecuaciones  $x - y = x + z = 0$  respecto de  $\mathcal{B}$ , calcula  $U^\perp$ .

**Ejercicio 6.** En  $\mathbb{R}^3$  consideramos el subespacio  $U$  generado por el vector  $(1, 2, 1)^T$ . Hallar la proyección ortogonal sobre  $U$ ,  $p_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , cuando se considera:

- el producto escalar usual,
- el producto escalar cuya matriz (de Gram) con respecto a la base canónica es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 7.** Con el método de Gram–Schmidt, construir una base ortonormal de  $\mathbb{R}^4$ , respecto del producto escalar usual, a partir de cada una de las siguientes bases. Idem con el producto escalar cuya matriz (de Gram) respecto de la base canónica es  $G = (g_{ij})$  donde  $g_{ij} = i\delta_{ij}$  (**delta de Kronecker**).

- $\mathcal{B}_1 = (v_1 = (1, 0, 0, 0)^T, v_2 = (1, 1, 0, 0)^T, v_3 = (1, 1, 1, 0)^T, v_4 = (1, 1, 1, 1)^T)$ .
- $\mathcal{B}_2 = (v_1 = (2, 1, 0, 0)^T, v_2 = (-1, 0, 1, 0)^T, v_3 = (1, -2, 1, 0)^T, v_4 = (0, 0, 0, 1)^T)$ .
- $\mathcal{B}_3 = (v_1 = (1, -1, -1, -1)^T, v_2 = (1, 1, 0, 0)^T, v_3 = (1, 0, 1, 0)^T, v_4 = (1, 0, 0, 1)^T)$ .

**Ejercicio 8. Propiedades del producto vectorial.** Demostrar que  $\forall u, u', v, w \in \mathbb{R}^3$  y  $\forall a \in \mathbb{R}$ , se verifica

1.  $(u + u') \wedge v = u \wedge v + u' \wedge v$ , (linealidad en la primera variable).
2.  $(au) \wedge v = a(u \wedge v) = u \wedge (av)$ , (linealidad en la primera variable).
3.  $u \wedge v = -(v \wedge u)$ , (antisimetría)
4. Si  $u, v$  son linealmente independientes, entonces  $\|u \wedge v\|$  es el área del paralelogramo determinado por  $u$  e  $v$ .
5.  $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$ .
6. Dar un ejemplo en el que  $u \wedge (v \wedge w) \neq (u \wedge v) \wedge w$ . El producto vectorial no es asociativo.
7.  $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$  (**identidad de Lagrange**).
8.  $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$  (**identidad de Jacobi**).

**Ejercicio 9. Producto mixto.** Es sabido que el volumen de un paralelepípedo está dado por el área de su base por su altura y se demuestra (usando integración elemental) que el volumen de una tetraedro es la *tercera parte* del área de su base por su altura. Dados  $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ , su *producto mixto* es, por definición,  $\langle x, y \wedge z \rangle \in \mathbb{R}$ . En coordenadas, tenemos

$$\langle x, y \wedge z \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Sean  $P_{x,y,z}$  el paralelepípedo determinado por  $x, y, z$ ,  $T_{x,y,z}$  el tetraedro determinado por  $x, y, z$  y  $\text{Pir}_{x,y,x+y,z}$  la pirámide (irregular) determinada por  $x, y, x+y, z$ . Demostrar

1.  $\text{vol } P_{x,y,z} = |\langle x, y \wedge z \rangle|$ ,
2.  $\text{vol } T_{x,y,z} = |\langle x, y \wedge z \rangle| / 6$ ,
3.  $\text{vol Pir}_{x,y,x+y,z} = |\langle x, y \wedge z \rangle| / 3 = \text{vol Pir}_{y,z,y+z,x} = \text{vol Pir}_{z,x,z+x,y}$

Generalización: Dados  $n$  vectores en  $\mathbb{R}^n$ , se define el  $n$ -**volumen** del  $n$ -**paralelepípedo** determinado por ellos como el valor absoluto del determinante de su matriz de coordenadas respecto de la base canónica.

### Ejercicio 10.

1. Si  $f$  es un endomorfismo simétrico de  $V$  entonces  $\ker f$  e  $\operatorname{im} f$  son mutuamente ortogonales (i.e., cada uno es el complemento ortogonal del otro).
2. Si la dimensión de  $V$  es finita, dada una base ortonormal  $\mathcal{B}$  de  $V$ , la matriz de  $f$  respecto de  $\mathcal{B}$  es simétrica si y solo si  $f$  es simétrico.
3. Prueba que, para una isometría  $f : V \rightarrow V$ , las siguientes condiciones son equivalentes:
  - a)  $f$  es endomorfismo simétrico,
  - b)  $f$  es endomorfismo involutivo (i.e.,  $f^2 = \operatorname{id}$ ),
  - c)  $V = V_1 \oplus V_{-1}$  (i.e., cada vector de  $V$  se descompone de modo único en suma de un vector fijo y un vector que se invierte por  $f$ ) y  $V_1, V_{-1}$  son mutuamente ortogonales.

En tal caso, demuestra que si  $\mathcal{B}_1$  es una base ortonormal de  $V_1$  y  $\mathcal{B}_{-1}$  es una base ortonormal de  $V_{-1}$  entonces  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1}$  es una base ortonormal de  $V$ . ¿Cómo es la matriz de  $f$  respecto de  $\mathcal{B}$ ? [Respuesta: es diagonal por bloques, con solo dos bloques diagonales: uno es  $I_{d_1}$  y otro es  $-I_{n-d_1}$ , donde  $d_1 = \dim V_1$ .]

4. Determina la matriz, respecto de la base canónica, de un endomorfismo simétrico  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $f(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$ ,  $f(e_2) = 2e_1 + 2e_2$  y  $2e_1 - 2e_2 - e_3$  es autovector.

### Ejercicio 11.

1. En  $\mathbb{R}^3$  se consideran las simetrías  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  en los planos  $H_1 : y = 0$ ,  $H_2 : x - y = 0$ ,  $H_3 : x + y + z = 0$ . Halla la matriz de la isometría composición  $f = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$  respecto de la base canónica y describe  $f$  verbalmente. ¿Qué puedes decir de las composiciones de  $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$  en otro orden?
2. Sea  $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una simetría sobre una recta vectorial. Encuentra una base ortonormal  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^2$  tal que la matriz de  $s$  respecto de  $\mathcal{B}$  es  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .  
¿Cuántas tales bases podemos encontrar en  $\mathbb{R}^2$ ? Idem  $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 12.** Sea  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . En el plano  $\mathbb{R}^2$  denotemos por  $r_\alpha$  la rotación de centro el origen, amplitud  $\alpha$  y sentido positivo. Denotemos por  $s_\alpha$  la simetría sobre la recta vectorial que forma un ángulo de  $\alpha/2$  con el semieje positivo de las  $x$  en sentido positivo. (Obs:  $r_{2\pi-\alpha}$  es la rotación de centro el origen, amplitud  $\alpha$  y sentido negativo.) Usando matrices, demostrar:

1.  $r_\alpha \circ r_\beta = r_\beta \circ r_\alpha = r_{\alpha+\beta}$ ,
2.  $s_\alpha \circ s_\beta = r_{\alpha-\beta}$ ,
3.  $r_\alpha \circ s_\beta = s_{\alpha+\beta}$ ,
4.  $s_\alpha \circ r_\beta = s_{\alpha-\beta}$ ,

Deducir que  $s_\alpha \circ s_\beta = s_\beta \circ s_\alpha$  si y sólo si los ejes de simetría son perpendiculares o coincidentes. Esto es: *dos simetrías en  $\mathbb{R}^2$  conmutan si y solo si sus ejes son perpendiculares o coincidentes.*

**En los siguientes 4 ejercicios en  $\mathbb{R}^3$ , fijamos la recta  $E = L(u)$  y el plano  $E^\perp$ , de ecuación  $ax + by + cz = 0$ , con  $u = (a, b, c)^T$  vector unitario.**

**Ejercicio 13.** Matriz  $A$  de la proyección ortogonal de  $\mathbb{R}^3$  sobre una recta. Sean

$$A = uu^T = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

1. Demostrar que la matriz (respecto de la base canónica) de  $p_E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la proyección ortogonal sobre  $E$ , es  $A$ .
2. Sea  $g_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación definida por  $g_u(x) = u \wedge x$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ . Demostrar que  $g_u$  es lineal y satisface  $g_u^2 = p_E - \text{id}$  y  $g_u^3 = -g_u$  y que la matriz de  $g_u$  (respecto de la base canónica) es  $B$ .
3. Demostrar que  $B^2 = A - I$ ,  $B^3 = -B$  y  $AB = 0 = BA$ .

**Ejercicio 14.** Matriz  $R$  de la rotación  $r_{u,\alpha}$  en  $\mathbb{R}^3$ , alrededor del eje generado por  $u$ , amplitud  $\alpha \in [0, 2\pi)$  y sentido positivo. **Fórmula de Rodrigues.**

- 1.

2. Demostrar que  $r_{u,\alpha} = \text{id} + (\text{sen } \alpha)g_u + (1 - \cos \alpha)g_u^2$  y que la matriz de  $r_{u,\alpha}$  (respecto de la base canónica) es

$$R = I + (\text{sen } \alpha)B + (1 - \cos \alpha)(A - I). \quad (2)$$

3. Demostrar que  $RB = BR = (\cos \alpha)B + (\text{sen } \alpha)B^2$  y que

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(\text{tr } R - 1), \quad \text{sen } \alpha = -\frac{1}{2} \text{tr}(RB).$$

Si  $a \neq 0$  y  $R = (r_{ij})$ , demostrar que  $\text{sen } \alpha = \frac{1}{a}(r_{32} - (1 - \cos \alpha)bc)$ .

4. (Sentido negativo) Demostrar que la matriz de  $r_{u,2\pi-\alpha}$  (respecto de la base canónica) es

$$I + (-\text{sen } \alpha)B + (1 - \cos \alpha)(A - I) = R^T = R^{-1}.$$

5. Demostrar que  $r_{u,\alpha} = r_{-u,-\alpha} = r_{-u,2\pi-\alpha}$  y que  $r_{-u,\alpha} = r_{u,\alpha}^{-1} = r_{u,2\pi-\alpha}$  (Sentido negativo al cambiar  $u$  por  $-u$  o  $\alpha$  por  $-\alpha$  pero no ambos).

**Ejercicio 15.** Matriz  $S$  de la simetría  $s_{E^\perp}$  en  $\mathbb{R}^3$  respecto del plano  $E^\perp$ . **Relación de Householder.** Demostrar

- $s_{E^\perp} = \text{id} - 2p_E$  y que la matriz de  $s_{E^\perp}$  (respecto de la base canónica) es  $S = I - 2A$ , con las notaciones de los ejercicios previos.
- $SB = B = BS$  y  $S(A - I) = (A - I) = (A - I)S$ .

**Ejercicio 16.** Matriz  $RS$  de la roto-simetría  $s_{E^\perp} \circ r_{u,\alpha} = r_{u,\alpha} \circ s_{E^\perp}$ . Con las notaciones de los ejercicios previos, demostrar

- $SR = RS = S + (\text{sen } \alpha)B + (1 - \cos \alpha)(A - I)$  es la matriz de la roto-simetría dada (respecto de la base canónica).

2.

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(\text{tr } RS + 1), \quad \text{sen } \alpha = -\frac{1}{2} \text{tr}(RSB) = -\frac{1}{2} \text{tr}(RB).$$

Si  $a \neq 0$  y  $RS = (q_{ij})$ , demostrar que  $\text{sen } \alpha = \frac{1}{a}(q_{32} - (2 - \cos \alpha)bc)$ .

**Ejercicio 17.** Sea  $R$  la matriz de una rotación y consideremos la matriz antisimétrica  $B' = R - R^T$ . Sea  $u \in \mathbb{R}^3$  tal que  $u \wedge x = B'x$  para todo  $x \in \mathbb{R}^3$ . Pruébese que si  $B' \neq 0$ , (es decir, si  $R$  no es simétrica) entonces  $L(u)$  es el eje de la rotación  $R$  y que  $B' = 0$  si y solo si  $R$  es la identidad o una rotación de ángulo  $\theta = \pi$ . ¿Qué relación tiene la matriz  $B'$  con la matriz  $B$  definida anteriormente? ¿Cuál es el resultado análogo en el caso de una roto-simetría?

**Ejercicio 18.**

1. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la aplicación dada por

$$f((x, y, z)^T) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)^T.$$

Probar que  $f$  es una isometría y describirla geoméricamente. ¿Es  $f^2 = \text{id}$ ?

2. Hallar la matriz (respecto de la base canónica) de la rotación en  $\mathbb{R}^3$  de amplitud  $\pi/2$  alrededor de la recta  $x = y = z$  y sentido positivo. Idem con sentido negativo.
3. Calcular la matriz, respecto de la base canónica, de la simetría de  $\mathbb{R}^3$  sobre del plano  $x = y$ .

4. Sea  $f$  el endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  cuya matriz en la base canónica es  $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{-\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ .

Comprobar que  $f$  es una isometría y describirla en términos de rotaciones y simetrías.

**Ejercicio 19.** Sea el endomorfismo  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  cuya matriz es  $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -1 & -3 \\ \sqrt{6} & -3 & -1 \end{pmatrix}$ .

1. Compruébese que  $f$  es una roto-simetría.
2. Calcúlese el eje y el ángulo de la rotación asociada y el plano de la simetría asociada a  $f$ .
3. Calcúlese una matriz de rotación  $R$  y una simetría  $S$  tales que  $M = RS$ .