ÁLGEBRA LINEAL
HOJA 11

Ejercicio 1. Dados puntos distintos $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$ y dado $k \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, demuestra que el lugar geométrico de los puntos $X \in \mathbb{R}^2$ tales que $\mathrm{d}(X, F_1) = \mathrm{d}(X, F_2)k$ es una circunferencia.

Ejercicio 2.

1. Demostrar que las **directrices** de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ son las rectas de ecuación $x = \pm\frac{a^2}{d} = \pm\frac{a}{\epsilon}$, donde $d^2 + b^2 = a^2$ y $\epsilon = \frac{d}{a}$ es la **excentricidad**.

2. Demostrar que las **directrices** de la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ son las rectas de ecuación $x = \pm\frac{a^2}{d} = \pm\frac{a}{\epsilon}$, donde $a^2 + b^2 = d^2$ y $\epsilon = \frac{d}{a}$ es la **excentricidad**.

Ejercicio 3.

1. Una **hipérbola** se dice **equilátera** si sus asíntotas son perpendiculares entre sí. Demostrar que un hiperbola es equilátera si y solo si su excentricidad es $\sqrt{2}$ si y solo si su semieje real es igual a su semieje imaginario.

2. La **elipse de Fagnano** tiene ecuación $x^2 + 2y^2 = 1$. Demuestra que su excentricidad es $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ejercicio 4. Demuéstrese que girando los ejes coordenados se puede transformar la ecuación de la hipérbola $x^2 - y^2 = 2k^2$ en la ecuación $x'y' = k^2$, donde $k \in \mathbb{R}$ es un escalar.

Ejercicio 5. Hallar el tipo de cónica, sus elementos geométricos (centro, vértice(s), foco(s), directriz(ces), excentricidad y asíntotas (si las hubiere)) de las cónicas

1. $4x^2 + 9y^2 = 36$,

2. $x^2 - 9y^2 = 9$,

3. $x^2 - 7y + 2 = 0$.

Hacer una representación gráfica de cada curva.

Ejercicio 6. Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son los vértices de la hipérbola de ecuación $11x^2 - 7y^2 = 77$ y cuyos vértices son los focos de dicha hipérbola. Hacer una representación gráfica de dichas curvas.

Ejercicio 7. Hallar el tipo de cónica en los siguientes casos:

1. $3x^2 - 4xy + 8x - 1 = 0$,
2. $6x^2 + 9y^2 - 24x - 54y + 51 = 0$,
3. $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$,
4. $4x^2 - y^2 + 56x + 2y + 195 = 0$.

En cada caso, hallar una ecuación reducida y los elementos de la cónica (vértice(s), foco(s), directriz(ces), excentricidad y asíntotas (si las hubiere)). Hacer una representación gráfica de cada curva que incluya los distintos sistemas de referencia utilizados.

Ejercicio 8. En $\mathbb{R}^2$ sean $\widetilde{A}$ la matriz de una cónica $\mathcal{C}$ no degenerada irreducible y un punto P de coordenadas $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. La recta de ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \widetilde{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 0$$

llama **polar** de P con respecto a $\mathcal{C}$. La recta de ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_P(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}|_P(y - y_0) = 0$$

se llama **tangente** a $\mathcal{C}$ en P, donde $f = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00}$.

1. Pruébese que P pertenece a $\mathcal{C}$ si y solo si P pertenece a la recta polar de P respecto de $\mathcal{C}$ si y solo si las rectas tangente y polar coinciden.

2. Diremos que un punto P es **exterior** a $\mathcal{C}$ si la intersección de su polar con $\mathcal{C}$ son dos puntos Q_1 y Q_2 distintos. Pruébese que si P es exterior a $\mathcal{C}$ entonces las rectas que unen P con Q_1 y P con Q_2 son tangentes a $\mathcal{C}$.

Ejercicio 9. Encuéntrese la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 5x$ que es perpendicular a la recta $3x + 2y - 1 = 0$, y las coordenadas del punto de contacto.

Ejercicio 10. Encuéntrense las tangentes con pendiente $+1$ a la hipérbola $4x^2 - 3y^2 + 12 = 0$ y sus puntos de contacto con la misma. ¿Para qué valores de la pendiente hay tangentes a la hipérbola?

Ejercicio 11.

1. Sea $\mathcal{C}$ una elipse o hipérbola. Demuéstrese que las rectas que unen cualquier punto P de $\mathcal{C}$ con los focos de $\mathcal{C}$ determinan ángulos iguales con la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P.

2. Sea $\mathcal{C}$ una parábola. Demuéstrese que la recta que une cualquier punto P de $\mathcal{C}$ con el foco de $\mathcal{C}$ y la recta paralela al eje de simetría de $\mathcal{C}$ que pasa por P determinan ángulos iguales con la recta tangente a $\mathcal{C}$ en P. (Podemos pensar que en una parábola, un foco se ha ido "al infinito").

Ejercicio 12. Hallar la ecuación (en coordenadas polares y cartesianas) de la cónica tal que tiene

1. foco F de coordenadas cartesianas $(2, 0)^T$, directriz de ecuación $x = -4$ y excentricidad $1/2$,

2. foco F de coordenadas cartesianas $(-3, 2)^T$, directriz de ecuación $x = 1$ y excentricidad 3,

3. foco F de coordenadas cartesianas $(-1, 4)^T$, directriz de ecuación $2x - y + 3 = 0$ y excentricidad 2.

Ejercicio 13. Demostrar que la ecuación en coordenadas polares $r = \frac{7}{3+4\cos\theta}$ define una hipérbola uno de cuyos focos coincide con el polo. Idem para $r = \frac{1}{1-2\sin\theta}$.

Ejercicio 14. Si 2θ el ángulo que forman las asíntotas a una hipérbola $\mathcal{C}$, demuéstrese que la excentricidad de $\mathcal{C}$ es $|\sec\theta|$.

Ejercicio 15. Calcular una ecuación reducida de las siguientes cuádricas y clasificarlas.

1. $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 - 18x - 144y - 24z + 153 = 0$

2. $2xy + z = 0$

3. $6x^2 + 3y^2 - z^2 + 12x - 18y - 8z + 7 = 0$

4. $4x^2 + 9y^2 - z^2 - 54y - 50z - 544 = 0$

5. $3x^2 - 3y^2 - z^2 + 42x + 144 = 0$

6. $2x^2 + 3y^2 + 23z^2 + 72xz + 150 = 0$

7. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4xy + 4xz + 4yz - 5 = 0$

8. $144x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 2164xz - 540x - 720z = 0$

9. $x^2 + 7y^2 + 10z^2 - 2xy - 4xz + 4yz - 12x + 12y + 60z - 24 = 0$

10. $2xy - 6x + 10y + z - 31 = 0$

11. $2x^2 + 2y^2 + 5z^2 - 4xy - 2xz + 2yz + 10x - 26y - 2z = 0$