Apellidos y Nombre:

DNI:

Número de hojas:

Álgebra Lineal. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos. 16/01/2024. Primer Parcial

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) ni libros o apuntes. (6) El examen está valorado en 10 puntos.

$\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

1. (TEORÍA)

a. (1 punto) Demuestra que $\mathrm{rg}(A+B) \leq \mathrm{rg}(A) + \mathrm{rg}(B)$, para todas matrices $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$.

b. (1 punto) Demuestra que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, para todas matrices $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

2. ¿Verdadero o falso? Si es verdadero, da una demostración y si es falso, encuentra un contraejemplo. Da las definiciones de las matrices indicadas.

a. (1 punto) El producto de dos matrices elementales es una matriz elemental.

b. (1 punto) El producto de dos matrices singulares es una matriz singular.

3. (1 punto) Suponiendo que la característica de $\mathbb{K}$ es distinta de 3, calcula todas la matrices $X \in M_3(\mathbb{K})$ que conmutan con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, i.e., $AX = XA$.

4. (3 puntos) Sea la característica de $\mathbb{K}$ distinta de 2. En $\mathbb{K}^4$ se consideran el subespacio U_a generado por los vectores $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1+a \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, y el subespacio W_a de ecuaciones $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ ax_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

Se pide una base y dimensión de $U_a \cap W_a$ y una base y dimensión de $U_a + W_a$, en función del valor $a \in \mathbb{K}$.

5. Sea la característica de $\mathbb{K}$ distinta de 2.

a. (1 punto) Demuestra que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ se expresa, de modo único, como suma de una matriz triangular superior y una matriz antisimétrica.

b. (1 punto) Halla una base $\mathcal{B}$ del espacio $M_3(\mathbb{K})/M_3^{anti}(\mathbb{K})$ y las coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_3^{anti}(\mathbb{K})$ y de $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + M_3^{anti}(\mathbb{K})$ respecto de $\mathcal{B}$.