Apellidos y Nombre:

DNI:

Número de hojas:

Álgebra Lineal. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos. 16/05/2024. Segundo Parcial

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) ni libros o apuntes. (6) El examen está valorado en 10 puntos.

$\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

1. (TEORÍA)

a. (1 punto) Sean $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ una base ortogonal de V y $x \in V$ un vector. Demuestra que las coordenadas de x respecto de $\mathcal{B}$ son los *coeficientes de Fourier* de x respecto de $\mathcal{B}$. Define base ortogonal y define dichos coeficientes.

b. (1 punto) Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ una base de V, $f : V \to \mathbb{K}$ una forma lineal y $A \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$ la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y 1. Demuestra que las coordenadas de f respecto de $\mathcal{B}^*$ son las entradas de A. Define base dual de $\mathcal{B}$.

2. ¿VERDADERO O FALSO? Si es verdadero, da una demostración y si es falso, encuentra un contraejemplo.

a. (1 punto) Si $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ son tales que $b_{ij} = a_{n-i+1,n-j+1}$, entonces $\det(B) = (-1)^n \det(A)$.

b. (1 punto) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es regular y λ es un autovalor de A entonces λ es no nulo y λ^{-1} es autovalor de A^{-1}.

3.

a. (1,5 puntos) En $\mathbb{R}^2$ se considera el conjunto de vectores $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Hallar razonadamente todas las isometrías f de $\mathbb{R}^2$ que dejan S invariante, es decir, $f(S) \subseteq S$.

b. (0,5 puntos) Si $f : V \to V$ es isometría, demuestra que $-f : V \to V$ es isometría y además los vectores que quedan fijos por f son aquellos vectores que se invierten por $-f$.

4. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & a \\ 3 & -1 & b \\ -2 & 0 & c \end{pmatrix}$.

a. (1 punto) Calcular los valores de a, b, c para que f tenga un único autovalor y el vector $(-2, 0, 1)^T$ sea vector propio.

b. (1 punto) Para dichos valores a, b, c, calcular la matriz de Jordan de A y una matriz de paso.

5. (2 puntos) Hallar $a_{00} \in \mathbb{R}$ para que la cónica $\mathcal{C}$ de ecuación $-3x^2 + 15y^2 + 18\sqrt{3}xy + 24x + a_{00} = 0$ sea una hipérbola con semidistancia focal igual a 6.

UN PUNTO EXTRA por calcular todos los elementos geométricos de $\mathcal{C}$ en el primer y último de los sistemas de referencia utilizados. UN PUNTO EXTRA por representar $\mathcal{C}$ gráficamente en todos los sistemas de referencia utilizados.