Apellidos y Nombre:

DNI y firma:

Número de hojas:

Álgebra Lineal. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos. 25/06/2024. Convocatoria Extraordinaria

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) ni libros o apuntes. (6) El examen está valorado en 10 puntos.

$\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

1. (2 puntos) Sean $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo sobre $\mathbb{R}$ y $f : V \to V$ una aplicación. ¿Qué tiene que satisfacer f para ser un *endomorfismo simétrico*? Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ autovalores de f distintos, demuestra que $\langle u, v \rangle = 0$, donde u, v son autovectores asociados a λ, μ respectivamente.

2. ¿VERDADERO O FALSO? Si es verdadero, da una demostración y si es falso, encuentra un contraejemplo.

a. (1 punto) Si V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ tal que $V = U \oplus U'$ (i.e., V es suma directa de dos subespacios vectoriales), entonces la aplicación $f : V \to V$ tal que $f(u + u') = iu + u'$, para todo $u \in U$ y $u' \in U'$ es un isomorfismo, donde $i \in \mathbb{C}$ es una raíz cuadrada de -1.

b. (1 punto) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, existen $D, Q \in M_3(\mathbb{C})$ tales que D es diagonal, Q es regular y $A^{101} = QDQ^{-1}$.

3. (1.5 puntos) (*Matriz tridiagonal*) Sean $T_n = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & c_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c_n & a_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ y $\Delta_n = \det(T_n)$. Demuestra $\Delta_n = a_n\Delta_{n-1} - b_{n-1}c_n\Delta_{n-2}$, para $n \geq 2$. Expresa t_{ij} en función de a_k, b_k, c_k, i y j.

4. (1.5 puntos) En $\mathbb{K}^4$ se consideran el subespacio vectorial H de ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ y el vector $v = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$, con $a, b, c, d \in \mathbb{K}$. Halla todos los $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{K}$ tales que $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + H = \lambda_3 v + H$ y determina la dimensión del subespacio (de $\mathbb{K}^3$) de tales soluciones.

5. (1.5 puntos) Se considera la hipérbola $\mathcal{C}$ de ecuación $9x^2 - 18x - 4y^2 + 8y - 31 = 0$. Completando cuadrados, halla el centro y las asíntotas de $\mathcal{C}$ así como los ángulos que estas determinan. Halla las ecuaciones de las rectas paralelas a las asíntotas que distan $\sqrt{13}$ del centro de $\mathcal{C}$. ¿Cuántas de tales rectas hay?

6. (1.5 puntos) En $\mathbb{K}^4$ se consideran la homotecia $h_{F,r}$ cuyo centro es el punto $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y razón $r \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$ y la translación t_v de vector v no nulo. Demuestra que $h_{F,r} \circ t_v \neq t_v \circ h_{F,r}$, cualesquiera que sean r y v. Se considera la homotecia $h_{2F,r}$. Halla la matriz de $h_{F,r} \circ h_{2F,r}$ y determina si es la matriz de una homotecia.