Apellidos y Nombre:

DNI y firma:

Número de hojas:

Álgebra Lineal. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos. Examen final 28/05/2024

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) ni libros, apuntes, etc.(6) El examen está valorado en 10 puntos. Los alumnos que tiene pendiente el curso completo deben escoger: ***opción A****: teoría del primer parcial y verdadero o falso del segundo u* ***opción B****: teoría del segundo parcial y verdadero o falso del primero. Además de lo anterior, deben hacer de cada parcial, sendas preguntas por valor de 3 puntos.*

$\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

PRIMER PARCIAL

1. (TEORÍA) (2 puntos) Enuncia y demuestra la *Fórmula de Grassmann* de las dimensiones de subespacios vectoriales.

2. ¿VERDADERO O FALSO? Si es verdadero, da una demostración y si es falso, encuentra un contraejemplo.

a. (1 punto) Dados $n \in \mathbb{N}$ y $A \in M_n(\mathbb{K})$, las matrices $I, A, A^2, A^3, \ldots, A^{n^2}$ son linealmente dependientes.
b. (1 punto) Se puede determinar si existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$, para todo $n \in \mathbb{N}$ usando una *matriz de Vandermonde*.

3. (1 punto) Si las matrices $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ son regulares y conmutan (i.e., $AB = BA$), demuestra que $A^j B^k = B^k A^j$, para todos $j, k \in \mathbb{Z}$.

4. (1 punto) Expresa A^{-1} como producto de matrices elementales, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. ¿Es única esta factorización?

5. (1 punto) Dados $n \in \mathbb{N}$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ y $E = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, calcula todas las matrices $X \in M_n(\mathbb{K})$ tales que $XE = EX$. [Indicación: generaliza el caso $n = 2$.]

6. (1 punto) En $M_n(\mathbb{K})$ se considera la familia W de matrices tales que cualquier fila tiene suma cero y cualquier columna tiene suma cero. Halla una base y la dimensión de W.

7. (1 punto) En $\mathbb{K}^4$ se considera el subespacio vectorial $W : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = 0 \end{cases}$. Halla una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^4$ tal que las ecuaciones de W respecto de $\mathcal{B}$ sean $y_1 = 0 = y_2$. Halla una base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^4/W$ que contenga el vector $(1, 1, 1, 1)^T + W$.

8. (1 punto) Demuestra que $\mathcal{B}' = (1, 1+x, 2+x^2, \dots, n+x^n)$ es una base del espacio $\mathbb{K}[x]_n$, calcula la matriz P de cambio de base de $\mathcal{B} = (x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1)$ a $\mathcal{B}'$ y halla las coordenadas del polinomio $1 - x + x^2 + \dots + (-1)^{n-1}x^{n-1}$ respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

SEGUNDO PARCIAL

9. (TEORÍA)

a. (1 punto) Si $f : V \to V'$ es una aplicación lineal, $\mathcal{B}$ es una base de V, $\mathcal{B}'$ es una base de V' y A es la matriz de f respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$, entonces la dimensión de la imagen de f coincide con el rango de A.

b. (1 punto) Sean V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ una base de V, $f : V \to \mathbb{K}$ una forma lineal y $A \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$ la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y 1. Demuestra que las coordenadas de f respecto de $\mathcal{B}^*$ son las entradas de A. Define base dual de $\mathcal{B}$.

10. ¿VERDADERO O FALSO? Si es verdadero, da una demostración y si es falso, encuentra un contraejemplo.

a. (1 punto) Los puntos $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$ son coplanarios, para todo $a, b, c, d \in \mathbb{K}$.

b. (1 punto) $\|u\|\|v\||\operatorname{sen}\widehat{u,v}| = \|u \wedge v\|$, para todo $u, v \in \mathbb{R}^3$.

11. (1 punto) Calcula el determinante $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & & a_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & a_1 & a_2 & & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

12. (2 puntos) Calcula la matriz de Jordan J de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Dados los puntos P_1, P_2, P_3 de coordenadas respectivas $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\0\\1\end{pmatrix}$, sea π el plano que los contiene y sea $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la simetría sobre π. Sea $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la traslación de vector $e_1 + e_2$.

a. (1 punto) Halla la matriz de s respecto de los sistemas de referencia canónicos.

b. (1 punto) Justifica $s \circ t = t \circ s$ y calcula $s \circ t(P)$, con P punto de coordenadas $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

14. (1 punto) Mediante, a lo sumo, una rotación y una traslación, obtener una ecuación reducida de la parábola de ecuación $x^2 + y^2 + 2xy + 2y + 1/4 = 0$, hallando su semilado recto. [Indicación: el semilado recto es $|p|$ con $y^2 = 2px$.]