

**Prácticas/Ejercicios de Álgebra Lineal.**  
**Curso 24/25. Doble grado**  
**Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos**

MARÍA JESÚS DE LA PUENTE MUÑOZ (UCM)

**Prácticas V 11/10/2024: Hoja 1**

13. Tenemos  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2 + bc \end{pmatrix}$ .

a.  $A^2 = A \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = a \\ d^2 + bc = d \\ (a+d)b = b \\ (a+d)c = c \end{cases}$  que es sistema no lineal (SNL) de 4 ecuaciones y 4

incógnitas. La tercera ecuación se expresa así,  $(a+d-1)b = 0$  de donde, por pertenecer  $a, d, b$  a un cuerpo  $\mathbb{K}$ , deducimos  $a+d-1 = 0$  ó  $b = 0$ . Surgen casos:

- Caso 1: si  $a+d-1 = 0$ . Entonces  $\begin{cases} d = 1-a \\ ad = a(1-a) = a - a^2 = bc = d - d^2 \end{cases}$ .

Si además  $b \neq 0$ , obtenemos  $c = \frac{a-a^2}{b}$ , luego  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$ , donde  $a, b \in \mathbb{K}$  y  $b \neq 0$ . En cambio, si  $b = 0$ , entonces  $a = 0$  ó  $a = 1$  y obtenemos  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$  ó  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ , donde  $c \in \mathbb{K}$ .

- Caso 2: si  $a+d-1 \neq 0$  entonces  $b = 0 = c$ ,  $a^2 = a$  y  $d^2 = d$ , de donde  $a(a-1) = a^2 - a = 0$ ,  $d(d-1) = d^2 - d = 0$ , luego  $a = 0$  ó  $a = 1$  y  $d = 0$  ó  $d = 1$ . Obtenemos  $A = 0$  ó  $A = I$ .

b.  $A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ d^2 + bc = 1 \\ (a+d)b = 0 \\ (a+d)c = 0 \end{cases}$

- Caso 1: si  $a+d = 0$ , razonando análogamente, obtenemos  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , con  $b, c \in \mathbb{K}$  ó  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ , con  $a, b \in \mathbb{K}$  y  $b \neq 0$ .

- Caso 2: si  $a+d \neq 0$ , razonando análogamente, obtenemos  $A = I$  ó  $A = -I$ .

c.  $A^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ d^2 + bc = 0 \\ (a+d)b = 0 \\ (a+d)c = 0 \end{cases}$  y razonando de modo similar, llegamos a  $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ó  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$  ó  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$ , con  $a, b \in \mathbb{K}$ ,  $b \neq 0$ .

18.

- a. Lo que ocurre aquí es que  $AB \neq BA$ . PROPIEDADES:  $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$ ,  $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$  y  $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - AB + BA$ , si  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ .
- b. Lo que ocurre aquí es que  $AB = 0$ , con  $A \neq 0$  y  $B \neq 0$ . Se dice que  $A$  y  $B$  son divisores de cero en  $M_2(\mathbb{K})$ .

## Prácticas V 18/10/2024: Hoja 2

2.

- a. Todas las matrices ERF en los conjuntos siguientes son (donde  $a, b, c, \dots \in \mathbb{K}$  y confeccionamos la lista en cantidad creciente de pivotes, comenzando con las de cero pivotes):

- En  $M_{1 \times 3}(\mathbb{K})$ :  $(0 \ 0 \ 0)$ ,  $(\boxed{1} \ a \ b)$ ,  $(0 \ \boxed{1} \ b)$ ,  $(0 \ 0 \ \boxed{1})$ ,
- En  $M_{2 \times 3}(\mathbb{K})$ :  $(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} 0 & \boxed{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  
 $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & 0 & b \\ 0 & \boxed{1} & c \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & a & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{smallmatrix})$ ,
- En  $M_{3 \times 3}(\mathbb{K})$ :  $(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} 0 & \boxed{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  
 $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & 0 & b \\ 0 & \boxed{1} & c \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & a & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{smallmatrix})$ ,
- En  $M_{3 \times 1}(\mathbb{K})$  son:  $(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix})$ ,
- En  $M_{3 \times 2}(\mathbb{K})$  son:  $(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$ .

- b. Como buscamos matrices ERC y ERF, son de la forma (por bloques)  $(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,

donde  $r$  es el rango. Así pues, tenemos

- En  $M_{1 \times 3}(\mathbb{K})$ :  $(0 \ 0 \ 0)$ ,  $(\boxed{1} \ 0 \ 0)$ ,
- En  $M_{2 \times 3}(\mathbb{K})$ :  $(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{smallmatrix})$ ,
- En  $M_{3 \times 3}(\mathbb{K})$ :  $(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix})$ ,  $(\begin{smallmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{smallmatrix})$ ,

- En  $M_{3 \times 1}(\mathbb{K})$  son:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$
  - En  $M_{3 \times 2}(\mathbb{K})$  son:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$
- c. En  $M_{3 \times 3}(\mathbb{K})$  las **EF** son:  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$   
 $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & \boxed{1} & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & \boxed{1} & c \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$  Sus correspondientes ERF se consiguen haciendo ceros por encima de los pivotes de fila (se hallan en el apartado primero)

### Prácticas V 25/10/2024

EJERCICIO. Hallar el *conmutador* de  $M_3(\mathbb{K})$  i.e., el conjunto  $C(M_3(\mathbb{K})) = \{X \in M_3(\mathbb{K}) : XY = YX, \forall Y \in M_3(\mathbb{K})\} = \bigcap_{Y \in M_3(\mathbb{K})} C(Y).$

Indicación: usar

- a. si  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $XY = YX$  y  $XZ = ZX$  entonces  $X(\lambda Y + \mu Z) = (\lambda Y + \mu Z)X$ ,<sup>1</sup>
- b. las 9 matrices  $B_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$  satisfacen<sup>2</sup> que toda  $Y \in M_3(\mathbb{K})$  es *combinación lineal* de ellas: esto es así ya que si  $Y = (y_{ij})$  entonces se comprueba que

$$Y = y_{11}B_{11} + y_{12}B_{12} + y_{13}B_{13} + y_{21}B_{21} + y_{22}B_{22} + y_{23}B_{23} + y_{31}B_{31} + y_{32}B_{32} + y_{33}B_{33}.$$

SOLUCIÓN:

Sea  $X = (x_{ij}) \in M_3(\mathbb{K})$ . Planteo  $XB_{11} = B_{11}X$  y obtengo  $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{31} = 0$ . Análogamente,  $XB_{22} = B_{22}X$  proporciona  $x_{21} = x_{23} = x_{12} = x_{32} = 0$ .

<sup>1</sup>Esto se puede expresar así: si  $X \in C(Y)$  y  $X \in C(Z)$  entonces  $X \in C(\lambda Y + \mu Z)$ , para todos  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ . También así:  $C(Y) \cap C(Z) \subseteq C(\lambda Y + \mu Z)$ , para todos  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ .

<sup>2</sup>Esto se puede expresar así:  $B_{ij} \in M_3(\mathbb{K})$  es la matriz que tiene un 1 en la entrada  $i, j$  y ceros en el resto de entradas.

Análogamente,  $XB_{33} = B_{33}X$  proporciona  $x_{31} = x_{32} = x_{13} = x_{23} = 0$ .

Planteo  $XB_{12} = B_{12}X$  y obtengo  $x_{11} = x_{22}$ .

Análogamente,  $XB_{13} = B_{13}X$  proporciona  $x_{11} = x_{33}$ .

Análogamente,  $XB_{23} = B_{23}X$  proporciona  $x_{22} = x_{33}$ , cosa que ya sabemos. Del mismo modo obtenemos información redundante con  $B_{21}, B_{31}, B_{32}$ .

Llegamos a que las matrices  $X$  que conmutan con **todas** las  $B_{ij}$  tienen la siguiente forma:  $x_{11} = x_{22} = x_{33}$  y  $x_{ij} = 0$ , siempre que  $i \neq j$ , es decir, son de la forma  $X = x_{11}I_3$ , con  $x_{11}$  libre. Pero por (a) y (b), para tener que  $X$  conmuta con  $Y$  es suficiente tener que  $X$  conmuta con **todas** las  $B_{ij}$ .

En resumen,  $C(M_3(\mathbb{K})) = \{\lambda I_3 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ .<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Este conjunto se puede escribir así:  $\mathbb{K}I_3$ . Hemos demostrado, de paso, que  $C(M_3(\mathbb{K})) = \bigcap_{i,j=1,2,3} C(B_{ij})$ .