

## ÁLGEBRA LINEAL

### Hoja 2

Advertencia: colocaremos las coordenadas de vectores y puntos de  $\mathbb{K}^n$  en columnas.

**Ejercicio 1** 1. Identificar las transformaciones elementales por filas asociadas a las siguientes matrices elementales. Idem por columnas:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Dada  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ , calcular la matriz  $H_f(A)$  de Hermite for filas de  $A$  y matrices elementales  $E_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , tales que  $H_f(A) = E_k E_{k-1} \dots E_1 A$ .

3. Expresa la la inversa de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$  como producto de matrices elementales.

**Ejercicio 2** 1. Encontrar todas las matrices escalonadas reducidas por filas en  $M_{1 \times 3}(\mathbb{K})$ ,  $M_{2 \times 3}(\mathbb{K})$ ,  $M_{3 \times 3}(\mathbb{K})$ ,  $M_{3 \times 1}(\mathbb{K})$  y  $M_{3 \times 2}(\mathbb{K})$ .

2. En los mismos conjuntos del apartado anterior encontrar todas las matrices escalonadas reducidas por columnas.

3. Encontrar todas las matrices escalonadas por filas en  $M_{3 \times 3}(\mathbb{K})$  y decir en cada caso cuál es su matriz escalonada reducida.

**Ejercicio 3** 1. Decir cuáles de las siguientes matrices son equivalentes por filas hallando su matriz escalonada reducida por filas  $H_f(\cdot)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -10 & -4 \\ 2 & -6 & 20 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -16 & -8 \\ 1 & -3 & 10 & -2 \\ -1 & 3 & -10 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Encontrar una matriz  $E_A$  producto de matrices elementales de forma que  $H_f(A) = E_A A$ . Hacer lo mismo para las restantes matrices.

3. Encontrar la matriz escalonada reducida por columnas de las anteriores matrices y decir cuáles son equivalentes por columnas.
4. Encontrar una matriz  $E'_A$  producto de matrices elementales de forma que  $H_c(A) = AE'_A$ , donde  $H_c(A)$  representa la matriz escalonada reducida por columnas de  $A$ . Hacer lo mismo para las restantes matrices.
5. Encontrar la matriz escalonada reducida por filas de las traspuestas de las anteriores matrices.
- f) Hallar, si existen, las soluciones de los sistemas cuyas matrices ampliadas son las anteriores.

**Ejercicio 4** Para  $A$ , halla su rango  $r$  y su **matriz canónica equivalente**  $\left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) = PAQ$ , donde  $Q$  y  $P$  son productos de matrices elementales. Idem para  $B$  y  $C$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 5** Sea  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  y sean  $N_1, N_2, N_3$  matrices escalonadas reducidas por filas:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Indica razonadamente cuál de las tres puede ser la matriz de Hermite por filas de  $A$  en los casos siguientes:

1.  $A$  es invertible
2.  $A$  tiene determinante cero
3.  $A$  tiene rango máximo y no es cuadrada
4.  $A$  tiene rango 3 y no tiene rango máximo

**Ejercicio 6** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

obtener una matriz  $Q$  invertible de tamaño 3, tal que

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Indica razonadamente cómo usarías este resultado para resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} x + 2y + t = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 2z - t = -2 \end{cases}$$

**Ejercicio 7** 1. **Teorema de Cayley-Hamilton** en tamaño 2. Demostrar que para cualquier matriz cuadrada  $A$  de tamaño 2 se cumple

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0,$$

es decir  $A$  satisface la ecuación  $T^2 - \text{tr}(A)T + \det(A)T^0 = 0$  (i.e.,  $A$  anula su polinomio característico.) Ojo: circulan demostraciones erróneas de este resultado.

2. Si  $A$  es invertible, entonces  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\text{tr}(A)I_2 - A)$  se expresa como un polinomio de grado menor que 2 en  $A$ .
3. Razonar cuándo una matriz  $A$  de tamaño 2 es igual a su inversa y establecer relación con el ejercicio 13 de la hoja 1.

**Ejercicio 8** Si  $A$  es matriz invertible, demostrar

1.  $(rA)^{-1} = A^{-1}/r$ , para todo escalar  $r \neq 0$ .
2.  $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$ , siendo  $p$  un número entero y positivo.
3.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

**Ejercicio 9 Fórmula de Leibniz.** Dada  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ , demostrar que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

donde  $S_n$  denota el grupo de permutaciones en  $n$  símbolos. Esto es la generalización de la **regla de Sarrus**.

**Ejercicio 10 Determinante de Vandermonde.**

1. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , demostrar que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

Indicación: obsérvese que  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ ,  $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ , ...,  $x^{n-1} - y^{n-1} = (x - y)(x^{n-2} + x^{n-3}y + \cdots + xy^{n-3} + y^{n-2})$ . Comenzar restando la primera columna de las restantes columnas, y tomar  $x = a_j$ ,  $y = a_1$ .

2. Pruébese que  $(x - 1)^3$  divide al polinomio  $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$

**Ejercicio 11** Calcula:  $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ -4 & 5 & 6 & -7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 9 & 2 & -7 & 7 \\ 5 & -6 & 0 & 1 & 8 \\ 8 & 7 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$

**Ejercicio 12** Halla y generaliza a tamaño arbitrario (cuando puedas)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1+a) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (1+b) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (1+c) \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 & 0 \\ 2+i & 3 & 4 & 3 \\ 4+i & 2 & 3 & 2 \\ 1-i & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}.$$

**Ejercicio 13** 1. Calcula la expresión general de la entrada de la matriz y el determinante de la misma y busca una generalización de los resultados a matrices de tamaño arbitrario:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{pmatrix}$$

2. **Matriz compañera.** Obtener la expresión general de la entrada de la matriz y el valor del determinante:

$$\begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & \cdots & (-1)^n a_n \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix},$$

3. **Matriz de Bose.**  $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$

4. **Una matriz circulante.** Demostrar  $\det \begin{pmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} =$   
 $p(1)p(i)p(-1)p(-i)$ , con  $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$ .

5. (Nuevo) Calcular  $\det(CF + D)$  donde  $C$  es matriz columna,  $F$  es matriz fila y  $D \in M_n(\mathbb{K})$  es matriz diagonal. [Se dice que  $CF + D$  es una **perturbación de rango uno** de  $D$ .]

**Ejercicio 14** Probar que  $\det \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{pmatrix} = 0$  para todo número real  $x$ .

Generalizar.

**Ejercicio 15** Demuéstrese que si  $A$  es antisimétrica entonces  $\det A = (-1)^n \det A$  y dedúzcase que las matrices antisimétricas de tamaño impar tienen determinante nulo, si  $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$ . ¿Qué se puede decir del determinante de las matrices antisimétricas de tamaño par?

**Ejercicio 16** Si  $A \neq I_n$  es una matriz **idempotente** de tamaño  $n$  (i.e.,  $A^2 = A$ ), calcular su determinante. Lo mismo para matriz **nilpotente** (i.e.,  $A^k = 0$  para cierto  $k \in \mathbb{N}$ ) e **involutiva** (i.e.,  $A^2 = I_n$ ).

**Ejercicio 17** Calcular el rango de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 2+i & 1 & 1+2i & 4+i \\ -1+i & 1+i & 1+i & -1+i \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 18** Obtener el rango de las siguientes matrices, en función de los parámetros:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & a & b & a+b \\ a & a & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ a+b & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 19** Hallar, cuando exista, la inversa de cada una de las matrices dadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 20** 1. ¿Para qué valores de  $a$  es invertible la matriz  $A = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ ?

2. Hallar  $A^{-1}$  cuando  $a = 1$ .

**Ejercicio 21** Resolver los siguientes sistemas mediante la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 4y = 6 \\ -x + 7y = 0 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 11x_4 = -7 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x + az = b \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} 2x - y = 2 - 2\sqrt{2} \\ -x + \sqrt{2}z = 1 \\ \sqrt{2}x + y = 2\sqrt{2} \end{cases} \qquad \text{f) } \begin{cases} x + 2z = 4 \\ -x + y = -1 \\ x + t = 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 22** Sea  $P$  una matriz cuadrada descompuesta en cajas  $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , con  $A$  y  $D$  cuadradas (no necesariamente del mismo tamaño). Si existe  $A^{-1}$ , la matriz  $D - CA^{-1}B$  se llama **complemento de Schur** de  $A$  en  $P$ .

1. Demuestra que  $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$  y deduce que  $\det(P) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B)$ .
2. Comprueba con un ejemplo que, aunque  $B$  y  $C$  sean cuadradas, en general no es cierto que  $\det(P) = \det(A) \det(D) - \det(B) \det(C)$ .
3. Demuestra que  $P = \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$ .