Prácticas/Ejercicios de Álgebra Lineal. Curso 24/25. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos

MARÍA JESÚS DE LA PUENTE MUÑOZ (UCM)

Prácticas V 11/10/2024: Hoja 1

13. Tenemos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{pmatrix}$.

a. $A^2 = A \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = a \\ d^2+bc = d \\ (a+d)b = b \\ (a+d)c = c \end{cases}$ que es sistema no lineal (SNL) de 4 ecuaciones y 4 incógnitas. La tercera ecuación se expresa así, $(a+d-1)b = 0$ de donde, por pertenecer a, d, b a un cuerpo $\mathbb{K}$, deducimos $a+d-1 = 0$ ó $b = 0$. Surgen casos:

- Caso 1: si $a+d-1 = 0$. Entonces $\begin{cases} d = 1-a \\ ad = a(1-a) = a - a^2 = bc = d - d^2 \end{cases}$.
Si además $b \neq 0$, obtenemos $c = \frac{a-a^2}{b}$, luego $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{K}$ y $b \neq 0$. En cambio, si $b = 0$, entonces $a = 0$ ó $a = 1$ y obtenemos $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ ó $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, donde $c \in \mathbb{K}$.
- Caso 2: si $a+d-1 \neq 0$ entonces $b = 0 = c$, $a^2 = a$ y $d^2 = d$, de donde $a(a-1) = a^2 - a = 0$, $d(d-1) = d^2 - d = 0$, luego $a = 0$ ó $a = 1$ y $d = 0$ ó $d = 1$. Obtenemos $A = 0$ ó $A = I$.

b. $A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = 1 \\ d^2+bc = 1 \\ (a+d)b = 0 \\ (a+d)c = 0 \end{cases}$

- Caso 1: si $a+d = 0$, razonando análogamente, obtenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $b, c \in \mathbb{K}$ ó $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{K}$ y $b \neq 0$.
- Caso 2: si $a+d \neq 0$, razonando análogamente, obtenemos $A = I$ ó $A = -I$.

c. $A^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = 0 \\ d^2+bc = 0 \\ (a+d)b = 0 \\ (a+d)c = 0 \end{cases}$ y razonando de modo similar, llegamos a $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ó $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ ó $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{K}$, $b \neq 0$.

18.

a. Lo que ocurre aquí es que $AB \neq BA$. PROPIEDADES: $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$, $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$ y $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - AB + BA$, si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$..

b. Lo que ocurre aquí es que $AB = 0$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$. Se dice que A y B son divisiores de cero en $M_2(\mathbb{K})$.

Prácticas V 18/10/2024: Hoja 2

2.

a. Todas las matrices ERF en los conjuntos siguientes son (donde $a, b, c, ... \in \mathbb{K}$ y confeccionamos la lista en cantidad creciente de pivotes, comenzando con las de cero pivotes):

- En $M_{1\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,
- En $M_{2\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & b \\ 0 & \boxed{1} & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & b \\ 0 & \boxed{1} & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 2}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Como buscamos matrices ERC y ERF, son de la forma (por bloques) $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde r es el rango. Así pues, tenemos

- En $M_{1\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- En $M_{2\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,

- En $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}\\0\\0\end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 2}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&0\\0&\boxed{1}\\0&0\end{pmatrix}$.

c. En $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$ las EF son: $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&\boxed{1}&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&\boxed{1}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&\boxed{1}&c\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&\boxed{1}&b\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&\boxed{1}&c\\0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}$. Sus correspondientes ERF se consiguen haciendo ceros por encima de los pivotes de fila (se hallan en el apartado primero)

Prácticas V 25/10/2024

EJERCICIO. Hallar el *conmutador* de $M_3(\mathbb{K})$ i.e., el conjunto $C(M_3(\mathbb{K})) = \{X \in M_3(\mathbb{K}) : XY = YX, \forall Y \in M_3(\mathbb{K})\} = \bigcap_{Y\in M_3(\mathbb{K})} C(Y)$.

Indicación: usar

a. si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $XY = YX$ y $XZ = ZX$ entonces $X(\lambda Y + \mu Z) = (\lambda Y + \mu Z)X$,[1]

b. las 9 matrices $B_{11} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{12} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{13} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{21} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{22} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{23} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{31} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B_{32} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B_{33} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$ satisfacen[2] que toda $Y \in M_3(\mathbb{K})$ es *combinación lineal* de ellas: esto es así ya que si $Y = (y_{ij})$ entonces se comprueba que

$$Y = y_{11}B_{11} + y_{12}B_{12} + y_{13}B_{13} + y_{21}B_{21} + y_{22}B_{22} + y_{23}B_{23} + y_{31}B_{31} + y_{32}B_{32} + y_{33}B_{33}.$$

SOLUCIÓN:

Sea $X = (x_{ij}) \in M_3(\mathbb{K})$. Planteo $XB_{11} = B_{11}X$ y obtengo $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{31} = 0$.
Análogamente, $XB_{22} = B_{22}X$ proporciona $x_{21} = x_{23} = x_{12} = x_{32} = 0$.

---

[1]Esto se puede expresar así: si $X \in C(Y)$ y $X \in C(Z)$ entonces $X \in C(\lambda Y + \mu Z)$, para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. También así: $C(Y) \cap C(Z) \subseteq C(\lambda Y + \mu Z)$, para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

[2]Esto se puede expresar así: $B_{ij} \in M_3(\mathbb{K})$ es la matriz que tiene un 1 en la entrada i, j y ceros en el resto de entradas.

Análogamente, $XB_{33} = B_{33}X$ proporciona $x_{31} = x_{32} = x_{13} = x_{23} = 0$.

Planteo $XB_{12} = B_{12}X$ y obtengo $x_{11} = x_{22}$.

Análogamente, $XB_{13} = B_{13}X$ proporciona $x_{11} = x_{33}$.

Análogamente, $XB_{23} = B_{23}X$ proporciona $x_{22} = x_{33}$, cosa que ya sabemos. Del mismo modo obtenemos información redundante con B_{21}, B_{31}, B_{32}.

Llegamos a que las matrices X que conmutan con **todas** las B_{ij} tienen la siguiente forma: $x_{11} = x_{22} = x_{33}$ y $x_{ij} = 0$, siempre que $i \neq j$, es decir, son de la forma $X = x_{11}I_3$, con x_{11} libre. Pero por (a) y (b), para tener que X conmuta con Y es suficiente tener que X conmuta con **todas** las B_{ij}.

En resumen, $C(M_3(\mathbb{K})) = \{\lambda I_3 : \lambda \in \mathbb{K}\}$.[3]

Prácticas V 22/11/2024: Hoja 3

2.

a. *a*) sí, pues es la definición usual (vista en clase),

b) no, porque falla la *propiedad del uno*: $1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, cuando $0 \neq y \in \mathbb{K}$.

c) no, pues falla una *propiedad distributiva*: $(b+a)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b+a) + (b+a)x - 1 \\ (b+a) + (b+a)y - 1 \end{pmatrix}$ es distinto de $b\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b+a) + (b+a)x - 2 \\ (b+a) + (b+a)y - 2 \end{pmatrix}$

d) no, porque falla la *propiedad del uno*: $1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, cuando $x \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$.

b. por raro que parezca, y si no me he equivocado, se cumplen las 8 propiedades de espacio vectorial. Hago la comprobación de dos de ellas (y el resto queda como ejercicio):

a) *elemento neutro para la suma*: si planteamos $\begin{cases} x + x' + 1 = x \\ y + y' - 1 = y \\ z + z' + 3 = z \end{cases}$ llegamos a $x' = -1$, $y' = 1$, $z' = -3$; el elemento neutro de esta suma es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

[3] Este conjunto se puede escribir así: $\mathbb{K}I_3$. Hemos demostrado, de paso, que $C(M_3(\mathbb{K})) = \bigcap_{i,j=1,2,3} C(B_{ij})$.

b) *elemento opuesto de* $(x, y, z)^T$: si planteamos $\begin{cases} x + x' + 1 = -1 \\ y + y' - 1 = 1 \\ z + z' + 3 = -3 \end{cases}$ llegamos a $x' = -2 - x$, $y' = 2 - y$, $z' = -6 - z$; el elemento opuesto de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -2 - x \\ 2 - y \\ -6 - z \end{pmatrix}$.

c. Empecemos por el segundo apartado. Se definen *suma* y *producto por escalares* así:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \times \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \xrightarrow{+} \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$$

$$(a + b\sqrt{5}, c + d\sqrt{5}) \mapsto (a + b\sqrt{5}) + (c + d\sqrt{5}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{5}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$$

$$(\lambda, a + b\sqrt{5}) \mapsto \lambda(a + b\sqrt{5}) = (a + b\sqrt{5})\lambda = (\lambda a) + (\lambda b)\sqrt{5}, \forall a, b, \lambda \in \mathbb{Q}$$

Al estar $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ contenido en $\mathbb{R}$ y ser $\mathbb{R}$ un *cuerpo* (con sus 10 propiedades), se verifican las 8 propiedades de *espacio vectorial* en $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ (comprueba los detalles).

Sin embargo, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ no es espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ porque, aunque es posible definir una suma así

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \xrightarrow{+} \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$$

$$(a + b\sqrt{5}, c + d\sqrt{5}) \mapsto (a + b\sqrt{5}) + (c + d\sqrt{5}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{5}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

no es posible definir un producto por escalares con espacio de llegada en $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ (el producto de un racional por un elemento de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ es, en general un elemento de $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, no de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$). Es decir, no podemos establecer una aplicación

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$$

sino que tendríamos que poner

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q}[\sqrt{5}].$$

Tampoco es $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}$ porque $\mathbb{Z}$ no es cuerpo.

Prácticas V 29/11/2024: Hoja 3

20.

a.
$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3-s=0\\ b_1+b_2+b_3-s=0\\ c_1+c_2+c_3-s=0\\ a_1+b_2+c_3-s=0\\ c_1+b_2+a_3-s=0\\ a_1+b_1+c_1-s=0\\ a_2+b_2+c_2-s=0\\ a_3+b_3+c_3-s=0 \end{cases}$$
es SLH de 8 ecuaciones en 10 incógnitas (los a_i, b_i, c_i y s).

b. Sumando las cuatro ecuaciones en que aparece b_2 y simplificando, llegamos a $3b_2 = s$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A, A' \in W$ y la suma de filas, columnas y diagonales de A es s y la suma de filas, columnas y diagonales de A' es s', entonces la suma de filas, columnas y diagonales de $A+A'$ es $s+s'$ y la suma de filas, columnas y diagonales de λA es λs, por lo que $A+A' \in W$ y $\lambda A \in W$. Esto prueba que W es subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{K})$.

Otra forma: el conjunto $\{(A,s) : A$ es cuadrado mágico de suma $s\}$ es subespacio de $M_3(\mathbb{K})\times\mathbb{K}$, ya que es el conjunto de soluciones de un SLH en 10 incógnitas. Pero como $3b_2 = s$, entonces podemos sustituir s por su valor, obteniendo así W como el conjunto de soluciones de un SLH en 9 incógnitas, obteniendo que W es subespacio de $M_3(\mathbb{K})$.

Sean $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Observamos que M_1, M_2, M_3 son cuadrados mágicos.

fg: De $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = b_2$, $\lambda_2 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).

li: De $0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

c. $B = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8\\ 7 & 5 & 3\\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3$, $s = 15$, $C = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ con $\lambda_1 = \frac{a_1+b_1+c_1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{a_1+b_1-2c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).