MÁS CUADRADOS MÁGICOS SON POSIBLES, por M.J. DE LA PUENTE MUÑOZ

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ se llama **mágica tropical** si

$$a_1 + b_2 = a_2 + b_1 \tag{1}$$

Sea W_2 el conjunto de las matrices mágicas tropicales de tamaño 2×2. Claramente, W_2 es un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{K})$ de dimensión 3.

La matriz $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ se llama **mágica tropical** si existe $s \in \mathbb{K}$ tal que

$$\begin{cases} a_1 + b_2 + c_3 = s \\ a_2 + b_3 + c_1 = s \\ a_3 + b_1 + c_2 = s \\ a_3 + b_2 + c_1 = s \\ a_2 + b_1 + c_3 = s \\ a_1 + b_3 + c_2 = s \end{cases} \tag{2}$$

Sea W_3 el conjunto de las matrices mágicas tropicales de tamaño 3×3.

1. Demuestra que la suma de todas la entradas de un matriz mágica tropical 3×3 es $3s$.
2. Demuestra que las matrices 3×3 con todas sus filas iguales, o todas sus columnas iguales pertenecen a W_3.
3. Si $A \in W_3$, demuestra que $b_1 + c_2 = b_2 + c_1$, $b_1 + c_3 = b_3 + c_1$ y $b_2 + c_3 = b_3 + c_2$. Más aun, demuestra que todo menor 2×2 de A es mágico tropical.
4. Demuestra que en el sistema de ecuaciones lineales (2) se pueden tomar a_2, b_2, c_2, b_1, b_3 como variables libres y que las restantes son variables ligadas.
5. Demuestra que W_3 es un subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{K})$ de dimensión 5.
6. Demuestra que una base de W_3 es

$$w_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, w_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

7. Algunos ejemplos de matrices mágicas tropicales son los siguientes: $w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 + 5w_5 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $E_{ij}N$, NE_{kl}, $E_{ij}NE_{kl}$, donde E_{ij} es matriz elemental de permutación.

8. ¿Puedes generalizar lo anterior a tamaño arbitrario?