Prácticas/Ejercicios de Álgebra Lineal. Curso 24/25. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos

MARÍA JESÚS DE LA PUENTE MUÑOZ (UCM)

Prácticas V 11/10/2024: Hoja 1

13. Tenemos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{pmatrix}$.

a. $A^2 = A \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = a \\ d^2+bc = d \\ (a+d)b = b \\ (a+d)c = c \end{cases}$ que es sistema no lineal (SNL) de 4 ecuaciones y 4 incógnitas. La tercera ecuación se expresa así, $(a+d-1)b = 0$ de donde, por pertenecer a, d, b a un cuerpo $\mathbb{K}$, deducimos $a+d-1 = 0$ ó $b = 0$. Surgen casos:

- Caso 1: si $a+d-1 = 0$. Entonces $\begin{cases} d = 1-a \\ ad = a(1-a) = a-a^2 = bc = d-d^2 \end{cases}$.
  Si además $b \neq 0$, obtenemos $c = \frac{a-a^2}{b}$, luego $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{K}$ y $b \neq 0$. En cambio, si $b = 0$, entonces $a = 0$ ó $a = 1$ y obtenemos $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ ó $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, donde $c \in \mathbb{K}$.
- Caso 2: si $a+d-1 \neq 0$ entonces $b = 0 = c$, $a^2 = a$ y $d^2 = d$, de donde $a(a-1) = a^2-a = 0$, $d(d-1) = d^2-d = 0$, luego $a = 0$ ó $a = 1$ y $d = 0$ ó $d = 1$. Obtenemos $A = 0$ ó $A = I$.

b. $A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = 1 \\ d^2+bc = 1 \\ (a+d)b = 0 \\ (a+d)c = 0 \end{cases}$

- Caso 1: si $a+d = 0$, razonando análogamente, obtenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $b, c \in \mathbb{K}$ ó $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{K}$ y $b \neq 0$.
- Caso 2: si $a+d \neq 0$, razonando análogamente, obtenemos $A = I$ ó $A = -I$.

c. $A^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = 0 \\ d^2+bc = 0 \\ (a+d)b = 0 \\ (a+d)c = 0 \end{cases}$ y razonando de modo similar, llegamos a $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ó $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ ó $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{K}$, $b \neq 0$.

18.

a. Lo que ocurre aquí es que $AB \neq BA$. PROPIEDADES: $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA$, $(A-B)^2 = A^2 + B^2 - AB - BA$ y $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 - AB + BA$, si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$..

b. Lo que ocurre aquí es que $AB = 0$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$. Se dice que A y B son divisiores de cero en $M_2(\mathbb{K})$.

Prácticas V 18/10/2024: Hoja 2

2.

a. Todas las matrices ERF en los conjuntos siguientes son (donde $a, b, c, ... \in \mathbb{K}$ y confeccionamos la lista en cantidad creciente de pivotes, comenzando con las de cero pivotes):

- En $M_{1\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,
- En $M_{2\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & b \\ 0 & \boxed{1} & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & b \\ 0 & \boxed{1} & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 2}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Como buscamos matrices ERC y ERF, son de la forma (por bloques) $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde r es el rango. Así pues, tenemos

- En $M_{1\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- En $M_{2\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,

- En $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}\\0\\0\end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 2}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&0\\0&\boxed{1}\\0&0\end{pmatrix}$.

c. En $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$ las EF son: $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&\boxed{1}&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&\boxed{1}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&\boxed{1}&c\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&\boxed{1}&b\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&\boxed{1}&c\\0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}$. Sus correspondientes ERF se consiguen haciendo ceros por encima de los pivotes de fila (se hallan en el apartado primero)

Prácticas V 25/10/2024

EJERCICIO. Hallar el *conmutador* de $M_3(\mathbb{K})$ i.e., el conjunto $C(M_3(\mathbb{K})) = \{X \in M_3(\mathbb{K}) : XY = YX, \forall Y \in M_3(\mathbb{K})\} = \bigcap_{Y\in M_3(\mathbb{K})} C(Y)$.

Indicación: usar

a. si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $XY = YX$ y $XZ = ZX$ entonces $X(\lambda Y + \mu Z) = (\lambda Y + \mu Z)X$,[1]

b. las 9 matrices $B_{11} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{12} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{13} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{21} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{22} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{23} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{31} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B_{32} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B_{33} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\in M_3(\mathbb{K})$ satisfacen[2] que toda $Y \in M_3(\mathbb{K})$ es *combinación lineal* de ellas: esto es así ya que si $Y = (y_{ij})$ entonces se comprueba que

$$Y = y_{11}B_{11} + y_{12}B_{12} + y_{13}B_{13} + y_{21}B_{21} + y_{22}B_{22} + y_{23}B_{23} + y_{31}B_{31} + y_{32}B_{32} + y_{33}B_{33}.$$

SOLUCIÓN:

Sea $X = (x_{ij}) \in M_3(\mathbb{K})$. Planteo $XB_{11} = B_{11}X$ y obtengo $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{31} = 0$. Análogamente, $XB_{22} = B_{22}X$ proporciona $x_{21} = x_{23} = x_{12} = x_{32} = 0$.

---

[1] Esto se puede expresar así: si $X \in C(Y)$ y $X \in C(Z)$ entonces $X \in C(\lambda Y + \mu Z)$, para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. También así: $C(Y) \cap C(Z) \subseteq C(\lambda Y + \mu Z)$, para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

[2] Esto se puede expresar así: $B_{ij} \in M_3(\mathbb{K})$ es la matriz que tiene un 1 en la entrada i, j y ceros en el resto de entradas.

Análogamente, $XB_{33} = B_{33}X$ proporciona $x_{31} = x_{32} = x_{13} = x_{23} = 0$.

Planteo $XB_{12} = B_{12}X$ y obtengo $x_{11} = x_{22}$.

Análogamente, $XB_{13} = B_{13}X$ proporciona $x_{11} = x_{33}$.

Análogamente, $XB_{23} = B_{23}X$ proporciona $x_{22} = x_{33}$, cosa que ya sabemos. Del mismo modo obtenemos información redundante con B_{21}, B_{31}, B_{32}.

Llegamos a que las matrices X que conmutan con **todas** las B_{ij} tienen la siguiente forma: $x_{11} = x_{22} = x_{33}$ y $x_{ij} = 0$, siempre que $i \neq j$, es decir, son de la forma $X = x_{11}I_3$, con x_{11} libre. Pero por (a) y (b), para tener que X conmuta con Y es suficiente tener que X conmuta con **todas** las B_{ij}.

En resumen, $C(M_3(\mathbb{K})) = \{\lambda I_3 : \lambda \in \mathbb{K}\}$.[3]

Prácticas V 22/11/2024: Hoja 3

2.

a. *a*) sí, pues es la definición usual (vista en clase),

b) no, porque falla la *propiedad del uno*: $1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, cuando $0 \neq y \in \mathbb{K}$.

c) no, pues falla una *propiedad distributiva*: $(b+a)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b+a)+(b+a)x-1 \\ (b+a)+(b+a)y-1 \end{pmatrix}$ es distinto de $b\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b+a)+(b+a)x-2 \\ (b+a)+(b+a)y-2 \end{pmatrix}$

d) no, porque falla la *propiedad del uno*: $1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x^2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, cuando $x \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$.

b. por raro que parezca, y si no me he equivocado, se cumplen las 8 propiedades de espacio vectorial. Hago la comprobación de dos de ellas (y el resto queda como ejercicio):

a) *elemento neutro para la suma*: si planteamos $\begin{cases} x + x' + 1 = x \\ y + y' - 1 = y \\ z + z' + 3 = z \end{cases}$ llegamos a $x' = -1$, $y' = 1$, $z' = -3$; el elemento neutro de esta suma es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

[3] Este conjunto se puede escribir así: $\mathbb{K}I_3$. Hemos demostrado, de paso, que $C(M_3(\mathbb{K})) = \bigcap_{i,j=1,2,3} C(B_{ij})$.

b) *elemento opuesto de* $(x, y, z)^T$: si planteamos $\begin{cases} x + x' + 1 = -1 \\ y + y' - 1 = 1 \\ z + z' + 3 = -3 \end{cases}$ llegamos a $x' = -2 - x$, $y' = 2 - y$, $z' = -6 - z$; el elemento opuesto de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -2 - x \\ 2 - y \\ -6 - z \end{pmatrix}$.

c. Empecemos por el segundo apartado. Se definen *suma* y *producto por escalares* así:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \times \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \xrightarrow{+} \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$$

$$(a + b\sqrt{5}, c + d\sqrt{5}) \mapsto (a + b\sqrt{5}) + (c + d\sqrt{5}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{5}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$$

$$(\lambda, a + b\sqrt{5}) \mapsto \lambda(a + b\sqrt{5}) = (a + b\sqrt{5})\lambda = (\lambda a) + (\lambda b)\sqrt{5}, \forall a, b, \lambda \in \mathbb{Q}$$

Al estar $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ contenido en $\mathbb{R}$ y ser $\mathbb{R}$ un *cuerpo* (con sus 10 propiedades), se verifican las 8 propiedades de *espacio vectorial* en $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ (comprueba los detalles).

Sin embargo, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ no es espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ porque, aunque es posible definir una suma así

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \xrightarrow{+} \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$$

$$(a + b\sqrt{5}, c + d\sqrt{5}) \mapsto (a + b\sqrt{5}) + (c + d\sqrt{5}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{5}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

no es posible definir un producto por escalares con espacio de llegada en $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ (el producto de un racional por un elemento de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ es, en general un elemento de $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, no de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$). Es decir, no podemos establecer una aplicación

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$$

sino que tendríamos que poner

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q}[\sqrt{5}].$$

Tampoco es $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}$ porque $\mathbb{Z}$ no es cuerpo.

Prácticas V 29/11/2024: Hoja 3

20.

a.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 - s = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 - s = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 - s = 0 \\ a_1 + b_2 + c_3 - s = 0 \\ c_1 + b_2 + a_3 - s = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 - s = 0 \\ a_2 + b_2 + c_2 - s = 0 \\ a_3 + b_3 + c_3 - s = 0 \end{cases}$$

es SLH de 8 ecuaciones en 10 incógnitas (los a_i, b_i, c_i y s).

b. Sumando las cuatro ecuaciones en que aparece b_2 y simplificando, llegamos a $3b_2 = s$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A, A' \in W$ y la suma de filas, columnas y diagonales de A es s y la suma de filas, columnas y diagonales de A' es s', entonces la suma de filas, columnas y diagonales de $A+A'$ es $s+s'$ y la suma de filas, columnas y diagonales de λA es λs, por lo que $A+A' \in W$ y $\lambda A \in W$. Esto prueba que W es subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{K})$.

Otra forma: el conjunto $\{(A,s) : A \text{ es cuadrado mágico de suma } s\}$ es subespacio de $M_3(\mathbb{K})\times\mathbb{K}$, ya que es el conjunto de soluciones de un SLH en 10 incógnitas. Pero como $3b_2 = s$, entonces podemos sustituir s por su valor, obteniendo así W como el conjunto de soluciones de un SLH en 9 incógnitas, obteniendo que W es subespacio de $M_3(\mathbb{K})$.

Sean $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que M_1, M_2, M_3 son cuadrados mágicos.

fg: De $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = b_2$, $\lambda_2 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).

li: De $0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

c. $B = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3$, $s = 15$, $C = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ con $\lambda_1 = \frac{a_1+b_1+c_1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{a_1+b_1-2c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).

Respuestas a dudas J 15/01/2025

DUDA 1: me ha surgido una duda acerca de la dependencia lineal. Para verificar si un conjunto de vectores es linealmente independiente basta con verlos en una matriz y, si el rango de la matriz es máximo, entonces los vectores son linealmente independientes. En caso de que haya, por ejemplo, una fila nula, y en el resto de las filas hay pivotes, entonces si contábamos con un número n de vectores significa que $n-1$ son linealmente independientes.

Mi duda surge en el método más eficiente para ïdentificar"qué vectores son los linealmente independientes. Obviamente la dependencia lineal no asegura que todo vector del conjunto sea combinación lineal de los restantes, solo que existe alguno que lo cumple. Por lo tanto no podemos "quitar.$^{\mathrm{el}}$ que queramos.

En un vídeo donde resuelven un ejercicio de dimensiones, el hombre los coloca en una matriz para ver si son linealmente independientes (lógico) y justifica que como están en R4 y hay cinco vectores, como mínimo uno de ellos de linealmente independiente para el espacio S+T (lógico). Lo que considero que no es correcto es que en el vídeo usa eso como justificación para eliminar el quinto vector, sin hacer ninguna operación o comprobación previa, pero la cuestión es que a lo mejor ese vector es linealmente independiente desde un comienzo con respecto a los demás.

Entiendo que se puede ir jugando con las combinaciones lineales entre ellos e ir viendo, pero parece un proceso algo tedioso. Si hay alguna forma más eficiente agradecería mucho si me la pudieras hacer saber.

RESPUESTA: Tenemos una familia de r vectores en un espacio vectorial V de dimensión n queremos ver (a) si son li o no, y en caso de que sean ld, (b) extraer una subfamilia maximal (esto es, de tamaño máximo) que sea li. (Dicha subfamilia será una base del subespacio que los vectores dados generan).

Se supone que nos dan las coordenadas de los vectores respecto de cierta base $\mathcal{B}$ (lo que nos permite pensar en V como si fuese $\mathbb{K}^n$, a todos los efectos).

Por un resultado visto en clase, si $r > n$, los vectores dados son ld (ya que en una base de V hay n vectores, y el cardinal de una familia li (la dada) es menor o igual que el cardinal de una familia generadora (la base)).

En todo caso, dispongamos las coordenadas de los vectores en columnas de una matriz A y hagamos transformaciones elementales de columnas a dicha matriz, a fin de encontrar pivotes de columna y rango.

¿Qué efecto tiene un TEC sobre una familia de vectores? Produce una nueva familia que genera el mismo subespacio. De este modo, cuando lleguemos a tener pivotes de columna, cada columna correspondiente a pivote será imprescindible, mientras que las no correspondientes a pivote serán prescindibles. Además, las columnas de la matriz A, de las cuales provienen los pivotes tienen la misma propiedad.

Ni siquiera nos hace falta que el pivote valga 1; basta con saber que no es nulo.

Adjunto cálculos.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 18 & 6 \\ -17 & -11 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1/2 & v_2/2 & v_3/6 & v_4+5v_1 & v_5+3v_1/2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 18 & 6 \\ -17/2 & -11/2 & \boxed{1} & -84 & -51/2 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hemos hecho unas cuantas TEC a la matriz A, obtenienndo la segunda matriz. Estas TEC son válidas en todo cuerpo de característica distinta de 2 y 3. Estas TEC y los pivotes obtenidos nos dicen lo siguiente:

a. $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = L(v_1/2, v_2/2, v_3/6, v_4+5v_1, v_5+3v_1/2) = L(v_1/2, v_2/2, v_3/6, v_5+3v_1/2) = L(v_1, v_2, v_3, v_5)$
b. una base del subespacio anterior es $v_1/2, v_2/2, v_3/6, v_5+3v_1/2$ y otra es v_1, v_2, v_3, v_5. Esto último también se puede comprobar calculando el menor 4×4 determinando por las primeras 4 columnas de A y viendo que no se anula.
c. El subespacio considerado es el total.

DUDA 2: tengo una duda respecto a la segunda parte del ejercicio P18 H3, que no estoy muy seguro de cómo encaminarlo. Cuándo nos piden ecuaciones implícitas de H respecto a esta base no canónica, se refiere a que tenemos que hallar las coordenadas de x, y, z, t en esa base, y usar esas para hallar las ecuaciones implícitas? O que se supone que tenemos que hacer?

RESPUESTA: Lo que preguntas no entra en este examen, ya que las cuestiones de cambio de base quedan para el segundo parcial. Con todo, te envío la respuesta completa, ya que conocemos todos los ingredientes necesarios para elaborarla.

Aunque la primera parte del ejercicio la hice en clase, la repito, ya que no la tengo a la vista.

Tenemos que $H = L(v_1, v_2, v_3, v_4)$ donde v_1, v_2, v_3, v_4 son los vectores cuyas coordenadas (respecto de la base canónica) aparecen en las columnas de la matriz A siguiente, a la que vamos a hacer unas pocas TEC, a fin de encontrar una base de H y unas ecuaciones implícitas de H:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1/2 & v_2+v_1/2 & v_3-v_1/2 & v_4-v_1/2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 9/2 & 9/2 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1/2 & 2/3(v_2+v_1/2) & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hemos hecho TEC a la matriz A, obteniendo la última matriz. Estas TEC son válidas en todo cuerpo de característica distinta de 2 y 3. Estas TEC y los pivotes obtenidos nos dicen lo siguiente:

a. $L(v_1, v_2, v_3, v_4) = L(v_1/2, u) = L(v_1, u)$, donde u tiene coordenadas $(0, 1, 1, 3)^T$
b. una base de H es v_1, u.

Para calcular una ecuaciones implícitas de H (respecto de la base canónica $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$), si $(x, y, z, t)^T$ son las coordenadas de un vector arbitrario v, imponemos lo siguiente:[4]

$$v \in H \Leftrightarrow v \text{ es } \text{ cl de } v_1, u \Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 3 & 1 \\ t & -1 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

y orlando el menor no nulo $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, llegamos a

$$\begin{cases} 0 = \det \begin{pmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 = \det \begin{pmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ t & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \sim \begin{cases} 0 = x + y - z \\ 0 = 2x - 3y + t \end{cases} \tag{1}$$

Estas son unas ecuaciones implícitas de H (y lo comprobamos viendo que v_1, v_2, v_3, v_4 y u las satisfacen).

Ahora vamos a cambiar de base, que es como cambiar de idioma. Llamamos $\mathcal{B}'$ a la base nueva (por conveniencia de notación) y obsevamos que $\mathcal{B}' = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Que un vector arbitrario v tenga coordenadas $(x', y', z', t')^T$ respecto de $\mathcal{B}'$ significa exactamente que $v = x'e_1 + y'(e_1 + e_2) + z'(e_1 + e_2 + e_3) + t'(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) = (x' + y' + z' + t')e_1 + (y' + z' + t')e_2 + (z' + t')e_3 + t'e_4$. Que el mismo vector v tenga coordenadas $(x, y, z, t)^T$ respecto de $\mathcal{B}_c$ significa exactamente que $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$.

Como las coordenadas de un vector cualquiera respecto de una base cualquiera son únicas, igualamos, obteniendo

$$\begin{cases} x = x' + y' + z' + t' \\ y = y' + z' + t' \\ z = z' + t' \\ t = t' \end{cases}$$

[4]Sabemos que esto también se puede hacer con M Gauss Jordan

y sustituyendo en las ecuaciones (1) y simplificando, llegamos a

$$\begin{cases} 0 = x' + 2y' + z' + t' \\ 0 = 2x' - y' - z' \end{cases}$$

que son unas ecuaciones implícitas de H respecto de $\mathcal{B}'$.

SEGUNDO PARCIAL

Prácticas V 24/01/2025: Hoja 4

17. (2) Tenemos $F = L(a, b, c)$. Escribimos las coordenadas de los vectores anteriores en las columnas de una matriz, para hallar la dimensión de F y una base de F: $M_F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ tiene rango 3, **si** $\operatorname{car} K \neq 2$, ya que $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$, luego $\dim F = \operatorname{rg} M_F = 3$ y (a, b, c) es una base de F.

Tenemos $G = L(d, e)$. Escribimos las coordenadas de los vectores anteriores en las columnas de una matriz, para hallar la dimensión de G y una base de G: $M_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, **si** $\operatorname{car} K \neq 2$, ya que $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, luego $\dim G = \operatorname{rg} M_G = 2$ y (d, e) es una base de G.

Ampliamos a, b, c a una base de $\mathbb{K}^4$, añadiendo, por ejemplo, e_3 (ya que $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (-4)(-1)^{4+3} \neq 0$), luego $e_3 + F$ es una base de $\mathbb{K}^4/F$ y $\dim \mathbb{K}^4/F = 4 - 3 = 1$.

Ampliamos d, e a una base de $\mathbb{K}^4$, añadiendo, por ejemplo, e_2, e_4 (ya que $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2(-1)^{4+4}(-1)^{3+2} \neq 0$), luego $e_2 + G, e_4 + G$ es una base de $\mathbb{K}^4/G$ y $\dim \mathbb{K}^4/G = 4 - 2 = 2$.

Tenemos $F + G = L(a, b, c, d, e)$. Escribimos las coordenadas de los vectores anteriores en las columnas de una matriz, para hallar la dimensión de $F + G$ y una base de $F + G$:

$$M_{F+G} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ Haciendo dos TEC, llegamos a } \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b-2a & c & d-a & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

y observamos que $b-2a=d-a$, de donde se deduce que $G=L(a,b,c,d,e)=L(a,b-2a,c,d-a,e)=L(a,b-2a,c,e)$ y tenemos, a la vista de la última matriz, $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 2 & 3\\ 3 & -4 & 4 & 0\\ 4 & -2 & 4 & 1\end{pmatrix}\neq 0$, luego $4=\operatorname{rg} M_{F+G}=\dim(F+G)$ y $(a,b-2a,c,e)$ es una base de $F+G$. También lo es (a,b,c,e). Deducimos que $\mathbb{K}^4=F+G$ y que $\dim(F\cap G)=3-2-4=1$. De los cálculos anteriores se sigue que $b-a=d\in F\cap G$ luego este vector constituye una base de $F\cap G$.

Tenemos $\dim(\mathbb{K}^4/(F+G))=4-4=0$, luego $\mathbb{K}^4/(F+G)=\{0\}$ no tiene base. Por otro lado, $\dim(\mathbb{K}^4/(F\cap G))=4-1=3$ y una base de $\mathbb{K}^4/(F\cap G)$ es $(e_2+(F\cap G),e_3+(F\cap G),e_4+(F\cap G)$ ya que $\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=1\neq 0.$