Prácticas/Ejercicios de Álgebra Lineal. Curso 24/25. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos

MARÍA JESÚS DE LA PUENTE MUÑOZ (UCM)

Prácticas V 11/10/2024: Hoja 1

13. Tenemos $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & (a+d)b \\ (a+d)c & d^2+bc \end{pmatrix}$.

a. $A^2 = A \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = a \\ d^2+bc = d \\ (a+d)b = b \\ (a+d)c = c \end{cases}$ que es sistema no lineal (SNL) de 4 ecuaciones y 4 incógnitas. La tercera ecuación se expresa así, $(a+d-1)b = 0$ de donde, por pertenecer a, d, b a un cuerpo $\mathbb{K}$, deducimos $a+d-1 = 0$ ó $b = 0$. Surgen casos:

- Caso 1: si $a+d-1 = 0$. Entonces $\begin{cases} d = 1-a \\ ad = a(1-a) = a - a^2 = bc = d - d^2 \end{cases}$.
  Si además $b \neq 0$, obtenemos $c = \frac{a-a^2}{b}$, luego $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{a-a^2}{b} & 1-a \end{pmatrix}$, donde $a, b \in \mathbb{K}$ y $b \neq 0$. En cambio, si $b = 0$, entonces $a = 0$ ó $a = 1$ y obtenemos $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$ ó $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, donde $c \in \mathbb{K}$.
- Caso 2: si $a+d-1 \neq 0$ entonces $b = 0 = c$, $a^2 = a$ y $d^2 = d$, de donde $a(a-1) = a^2 - a = 0$, $d(d-1) = d^2 - d = 0$, luego $a = 0$ ó $a = 1$ y $d = 0$ ó $d = 1$. Obtenemos $A = 0$ ó $A = I$.

b. $A^2 = I \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = 1 \\ d^2+bc = 1 \\ (a+d)b = 0 \\ (a+d)c = 0 \end{cases}$

- Caso 1: si $a+d = 0$, razonando análogamente, obtenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $b, c \in \mathbb{K}$ ó $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{K}$ y $b \neq 0$.
- Caso 2: si $a+d \neq 0$, razonando análogamente, obtenemos $A = I$ ó $A = -I$.

c. $A^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc = 0 \\ d^2+bc = 0 \\ (a+d)b = 0 \\ (a+d)c = 0 \end{cases}$ y razonando de modo similar, llegamos a $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ó $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ ó $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}$, con $a, b \in \mathbb{K}$, $b \neq 0$.

18.

a. Lo que ocurre aquí es que $AB \neq BA$. PROPIEDADES: $(A+B)^2 = A^2+B^2+AB+BA$, $(A-B)^2 = A^2+B^2-AB-BA$ y $(A+B)(A-B) = A^2-B^2-AB+BA$, si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$..

b. Lo que ocurre aquí es que $AB = 0$, con $A \neq 0$ y $B \neq 0$. Se dice que A y B son divisiores de cero en $M_2(\mathbb{K})$.

Prácticas V 18/10/2024: Hoja 2

2.

a. Todas las matrices ERF en los conjuntos siguientes son (donde $a, b, c, ... \in \mathbb{K}$ y confeccionamos la lista en cantidad creciente de pivotes, comenzando con las de cero pivotes):

- En $M_{1\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,
- En $M_{2\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & b \\ 0 & \boxed{1} & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & b \\ 0 & \boxed{1} & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 2}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & a \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Como buscamos matrices ERC y ERF, son de la forma (por bloques) $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde r es el rango. Así pues, tenemos

- En $M_{1\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$,
- En $M_{2\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$,

- En $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}\\0\\0\end{pmatrix}$,
- En $M_{3\times 2}(\mathbb{K})$ son: $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&0\\0&\boxed{1}\\0&0\end{pmatrix}$.

c. En $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$ las EF son: $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&\boxed{1}&b\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&\boxed{1}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&\boxed{1}&c\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&\boxed{1}&b\\0&0&\boxed{1}\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\boxed{1}&a&b\\0&\boxed{1}&c\\0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}$. Sus correspondientes ERF se consiguen haciendo ceros por encima de los pivotes de fila (se hallan en el apartado primero)

Prácticas V 25/10/2024

EJERCICIO. Hallar el *conmutador* de $M_3(\mathbb{K})$ i.e., el conjunto $C(M_3(\mathbb{K})) = \{X \in M_3(\mathbb{K}) : XY = YX, \forall Y \in M_3(\mathbb{K})\} = \bigcap_{Y\in M_3(\mathbb{K})} C(Y)$.

Indicación: usar

a. si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $XY = YX$ y $XZ = ZX$ entonces $X(\lambda Y + \mu Z) = (\lambda Y + \mu Z)X$,[1]

b. las 9 matrices $B_{11} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{12} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{13} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{21} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{22} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{23} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $B_{31} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $B_{32} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $B_{33} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\in M_3(\mathbb{K})$ satisfacen[2] que toda $Y \in M_3(\mathbb{K})$ es *combinación lineal* de ellas: esto es así ya que si $Y = (y_{ij})$ entonces se comprueba que

$$Y = y_{11}B_{11} + y_{12}B_{12} + y_{13}B_{13} + y_{21}B_{21} + y_{22}B_{22} + y_{23}B_{23} + y_{31}B_{31} + y_{32}B_{32} + y_{33}B_{33}.$$

SOLUCIÓN:

Sea $X = (x_{ij}) \in M_3(\mathbb{K})$. Planteo $XB_{11} = B_{11}X$ y obtengo $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{31} = 0$. Análogamente, $XB_{22} = B_{22}X$ proporciona $x_{21} = x_{23} = x_{12} = x_{32} = 0$.

---

[1] Esto se puede expresar así: si $X \in C(Y)$ y $X \in C(Z)$ entonces $X \in C(\lambda Y + \mu Z)$, para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. También así: $C(Y) \cap C(Z) \subseteq C(\lambda Y + \mu Z)$, para todos $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

[2] Esto se puede expresar así: $B_{ij} \in M_3(\mathbb{K})$ es la matriz que tiene un 1 en la entrada i, j y ceros en el resto de entradas.

Análogamente, $XB_{33} = B_{33}X$ proporciona $x_{31} = x_{32} = x_{13} = x_{23} = 0$.

Planteo $XB_{12} = B_{12}X$ y obtengo $x_{11} = x_{22}$.

Análogamente, $XB_{13} = B_{13}X$ proporciona $x_{11} = x_{33}$.

Análogamente, $XB_{23} = B_{23}X$ proporciona $x_{22} = x_{33}$, cosa que ya sabemos. Del mismo modo obtenemos información redundante con B_{21}, B_{31}, B_{32}.

Llegamos a que las matrices X que conmutan con **todas** las B_{ij} tienen la siguiente forma: $x_{11} = x_{22} = x_{33}$ y $x_{ij} = 0$, siempre que $i \neq j$, es decir, son de la forma $X = x_{11}I_3$, con x_{11} libre. Pero por (a) y (b), para tener que X conmuta con Y es suficiente tener que X conmuta con **todas** las B_{ij}.

En resumen, $C(M_3(\mathbb{K})) = \{\lambda I_3 : \lambda \in \mathbb{K}\}$.[3]

Prácticas V 22/11/2024: Hoja 3

2.

a. *a*) sí, pues es la definición usual (vista en clase),

b) no, porque falla la *propiedad del uno*: $1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1x\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, cuando $0 \neq y \in \mathbb{K}$.

c) no, pues falla una *propiedad distributiva*: $(b+a)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(b+a)+(b+a)x-1\\(b+a)+(b+a)y-1\end{pmatrix}$ es distinto de $b\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(b+a)+(b+a)x-2\\(b+a)+(b+a)y-2\end{pmatrix}$

d) no, porque falla la *propiedad del uno*: $1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1x^2\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^2\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, cuando $x \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$.

b. por raro que parezca, y si no me he equivocado, se cumplen las 8 propiedades de espacio vectorial. Hago la comprobación de dos de ellas (y el resto queda como ejercicio):

a) *elemento neutro para la suma*: si planteamos $\begin{cases} x + x' + 1 = x \\ y + y' - 1 = y \\ z + z' + 3 = z \end{cases}$ llegamos a $x' = -1$, $y' = 1$, $z' = -3$; el elemento neutro de esta suma es $\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$

[3] Este conjunto se puede escribir así: $\mathbb{K}I_3$. Hemos demostrado, de paso, que $C(M_3(\mathbb{K})) = \bigcap_{i,j=1,2,3} C(B_{ij})$.

b) *elemento opuesto de* $(x, y, z)^T$: si planteamos $\begin{cases} x + x' + 1 = -1 \\ y + y' - 1 = 1 \\ z + z' + 3 = -3 \end{cases}$ llegamos a $x' = -2 - x$, $y' = 2 - y$, $z' = -6 - z$; el elemento opuesto de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es $\begin{pmatrix} -2 - x \\ 2 - y \\ -6 - z \end{pmatrix}$.

c. Empecemos por el segundo apartado. Se definen *suma* y *producto por escalares* así:

$$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] \times \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \xrightarrow{+} \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$$

$$(a + b\sqrt{5}, c + d\sqrt{5}) \mapsto (a + b\sqrt{5}) + (c + d\sqrt{5}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{5}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}[\sqrt{5}] \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q}[\sqrt{5}]$$

$$(\lambda, a + b\sqrt{5}) \mapsto \lambda(a + b\sqrt{5}) = (a + b\sqrt{5})\lambda = (\lambda a) + (\lambda b)\sqrt{5}, \forall a, b, \lambda \in \mathbb{Q}$$

Al estar $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ contenido en $\mathbb{R}$ y ser $\mathbb{R}$ un *cuerpo* (con sus 10 propiedades), se verifican las 8 propiedades de *espacio vectorial* en $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ (comprueba los detalles).

Sin embargo, $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ no es espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$ porque, aunque es posible definir una suma así

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \times \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \xrightarrow{+} \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$$

$$(a + b\sqrt{5}, c + d\sqrt{5}) \mapsto (a + b\sqrt{5}) + (c + d\sqrt{5}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{5}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{Z}$$

no es posible definir un producto por escalares con espacio de llegada en $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ (el producto de un racional por un elemento de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ es, en general un elemento de $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$, no de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$). Es decir, no podemos establecer una aplicación

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$$

sino que tendríamos que poner

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Z}[\sqrt{5}] \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Q}[\sqrt{5}].$$

Tampoco es $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}$ porque $\mathbb{Z}$ no es cuerpo.

Prácticas V 29/11/2024: Hoja 3

20.

a.

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3-s=0\\ b_1+b_2+b_3-s=0\\ c_1+c_2+c_3-s=0\\ a_1+b_2+c_3-s=0\\ c_1+b_2+a_3-s=0\\ a_1+b_1+c_1-s=0\\ a_2+b_2+c_2-s=0\\ a_3+b_3+c_3-s=0 \end{cases}$$

es SLH de 8 ecuaciones en 10 incógnitas (los a_i, b_i, c_i y s).

b. Sumando las cuatro ecuaciones en que aparece b_2 y simplificando, llegamos a $3b_2 = s$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A, A' \in W$ y la suma de filas, columnas y diagonales de A es s y la suma de filas, columnas y diagonales de A' es s', entonces la suma de filas, columnas y diagonales de $A+A'$ es $s+s'$ y la suma de filas, columnas y diagonales de λA es λs, por lo que $A+A' \in W$ y $\lambda A \in W$. Esto prueba que W es subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{K})$.

Otra forma: el conjunto $\{(A, s) : A$ es cuadrado mágico de suma $s\}$ es subespacio de $M_3(\mathbb{K})\times\mathbb{K}$, ya que es el conjunto de soluciones de un SLH en 10 incógnitas. Pero como $3b_2 = s$, entonces podemos sustituir s por su valor, obteniendo así W como el conjunto de soluciones de un SLH en 9 incógnitas, obteniendo que W es subespacio de $M_3(\mathbb{K})$.

Sean $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que M_1, M_2, M_3 son cuadrados mágicos.

fg: De $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = b_2$, $\lambda_2 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).

li: De $0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

c. $B = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8\\ 7 & 5 & 3\\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3$, $s = 15$, $C = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ con $\lambda_1 = \frac{a_1+b_1+c_1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{a_1+b_1-2c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).

Respuestas a dudas J 15/01/2025

DUDA 1: me ha surgido una duda acerca de la dependencia lineal. Para verificar si un conjunto de vectores es linealmente independiente basta con verlos en una matriz y, si el rango de la matriz es máximo, entonces los vectores son linealmente independientes. En caso de que haya, por ejemplo, una fila nula, y en el resto de las filas hay pivotes, entonces si contábamos con un número n de vectores significa que $n-1$ son linealmente independientes.

Mi duda surge en el método más eficiente para ïdentificar"qué vectores son los linealmente independientes. Obviamente la dependencia lineal no asegura que todo vector del conjunto sea combinación lineal de los restantes, solo que existe alguno que lo cumple. Por lo tanto no podemos "quitar.el que queramos.

En un vídeo donde resuelven un ejercicio de dimensiones, el hombre los coloca en una matriz para ver si son linealmente independientes (lógico) y justifica que como están en R4 y hay cinco vectores, como mínimo uno de ellos de linealmente independiente para el espacio S+T (lógico). Lo que considero que no es correcto es que en el vídeo usa eso como justificación para eliminar el quinto vector, sin hacer ninguna operación o comprobación previa, pero la cuestión es que a lo mejor ese vector es linealmente independiente desde un comienzo con respecto a los demás.

Entiendo que se puede ir jugando con las combinaciones lineales entre ellos e ir viendo, pero parece un proceso algo tedioso. Si hay alguna forma más eficiente agradecería mucho si me la pudieras hacer saber.

RESPUESTA: Tenemos una familia de r vectores en un espacio vectorial V de dimensión n queremos ver (a) si son li o no, y en caso de que sean ld, (b) extraer una subfamilia maximal (esto es, de tamaño máximo) que sea li. (Dicha subfamilia será una base del subespacio que los vectores dados generan).

Se supone que nos dan las coordenadas de los vectores respecto de cierta base $\mathcal{B}$ (lo que nos permite pensar en V como si fuese $\mathbb{K}^n$, a todos los efectos).

Por un resultado visto en clase, si $r > n$, los vectores dados son ld (ya que en una base de V hay n vectores, y el cardinal de una familia li (la dada) es menor o igual que el cardinal de una familia generadora (la base)).

En todo caso, dispongamos las coordenadas de los vectores en columnas de una matriz A y hagamos transformaciones elementales de columnas a dicha matriz, a fin de encontrar pivotes de columna y rango.

¿Qué efecto tiene un TEC sobre una familia de vectores? Produce una nueva familia que genera el mismo subespacio. De este modo, cuando lleguemos a tener pivotes de columna, cada columna correspondiente a pivote será imprescindible, mientras que las no correspondientes a pivote serán prescindibles. Además, las columnas de la matriz A, de las cuales provienen los pivotes tienen la misma propiedad.

Ni siquiera nos hace falta que el pivote valga 1; basta con saber que no es nulo.

Adjunto cálculos.

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 18 & 6 \\ -17 & -11 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1/2 & v_2/2 & v_3/6 & v_4+5v_1 & v_5+3v_1/2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 18 & 6 \\ -17/2 & -11/2 & \boxed{1} & -84 & -51/2 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \end{array}$$

Hemos hecho unas cuantas TEC a la matriz A, obtenienndo la segunda matriz. Estas TEC son válidas en todo cuerpo de característica distinta de 2 y 3. Estas TEC y los pivotes obtenidos nos dicen lo siguiente:

a. $L(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = L(v_1/2, v_2/2, v_3/6, v_4+5v_1, v_5+3v_1/2) = L(v_1/2, v_2/2, v_3/6, v_5+3v_1/2) = L(v_1, v_2, v_3, v_5)$
b. una base del subespacio anterior es $v_1/2, v_2/2, v_3/6, v_5+3v_1/2$ y otra es v_1, v_2, v_3, v_5. Esto último también se puede comprobar calculando el menor 4×4 determinando por las primeras 4 columnas de A y viendo que no se anula.
c. El subespacio considerado es el total.

DUDA 2: tengo una duda respecto a la segunda parte del ejercicio P18 H3, que no estoy muy seguro de cómo encaminarlo. Cuándo nos piden ecuaciones implícitas de H respecto a esta base no canónica, se refiere a que tenemos que hallar las coordenadas de x, y, z, t en esa base, y usar esas para hallar las ecuaciones implícitas? O que se supone que tenemos que hacer?

RESPUESTA: Lo que preguntas no entra en este examen, ya que las cuestiones de cambio de base quedan para el segundo parcial. Con todo, te envío la respuesta completa, ya que conocemos todos los ingredientes necesarios para elaborarla.

Aunque la primera parte del ejercicio la hice en clase, la repito, ya que no la tengo a la vista.

Tenemos que $H = L(v_1, v_2, v_3, v_4)$ donde v_1, v_2, v_3, v_4 son los vectores cuyas coordenadas (respecto de la base canónica) aparecen en las columnas de la matriz A siguiente, a la que vamos a hacer unas pocas TEC, a fin de encontrar una base de H y unas ecuaciones implícitas de H:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1/2 & v_2+v_1/2 & v_3-v_1/2 & v_4-v_1/2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 9/2 & 9/2 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array} \rightsquigarrow$$

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} v_1/2 & 2/3(v_2+v_1/2) & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hemos hecho TEC a la matriz A, obteniendo la última matriz. Estas TEC son válidas en todo cuerpo de característica distinta de 2 y 3. Estas TEC y los pivotes obtenidos nos dicen lo siguiente:

a. $L(v_1, v_2, v_3, v_4) = L(v_1/2, u) = L(v_1, u)$, donde u tiene coordenadas $(0, 1, 1, 3)^T$
b. una base de H es v_1, u.

Para calcular una ecuaciones implícitas de H (respecto de la base canónica $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3, e_4)$), si $(x, y, z, t)^T$ son las coordenadas de un vector arbitrario v, imponemos lo siguiente:[4]

$$v \in H \Leftrightarrow v \text{ es } \text{ cl de } v_1, u \Leftrightarrow \operatorname{rg}\begin{pmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 3 & 1 \\ t & -1 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

y orlando el menor no nulo $\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, llegamos a

$$\begin{cases} 0 = \det\begin{pmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 = \det\begin{pmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ t & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases} \sim \begin{cases} 0 = x + y - z \\ 0 = 2x - 3y + t \end{cases} \tag{1}$$

Estas son unas ecuaciones implícitas de H (y lo comprobamos viendo que v_1, v_2, v_3, v_4 y u las satisfacen).

Ahora vamos a cambiar de base, que es como cambiar de idioma. Llamamos $\mathcal{B}'$ a la base nueva (por conveniencia de notación) y obsevamos que $\mathcal{B}' = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Que un vector arbitrario v tenga coordenadas $(x', y', z', t')^T$ respecto de $\mathcal{B}'$ significa exactamente que $v = x'e_1 + y'(e_1+e_2) + z'(e_1+e_2+e_3) + t'(e_1+e_2+e_3+e_4) = (x'+y'+z'+t')e_1 + (y'+z'+t')e_2 + (z'+t')e_3 + t'e_4$. Que el mismo vector v tenga coordenadas $(x, y, z, t)^T$ respecto de $\mathcal{B}_c$ significa exactamente que $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$.

Como las coordenadas de un vector cualquiera respecto de una base cualquiera son únicas, igualamos, obteniendo

$$\begin{cases} x = x' + y' + z' + t' \\ y = y' + z' + t' \\ z = z' + t' \\ t = t' \end{cases}$$

[4]Sabemos que esto también se puede hacer con M Gauss Jordan

y sustituyendo en las ecuaciones (1) y simplificando, llegamos a

$$\begin{cases} 0 = x' + 2y' + z' + t' \\ 0 = 2x' - y' - z' \end{cases}$$

que son unas ecuaciones implícitas de H respecto de $\mathcal{B}'$.

SEGUNDO PARCIAL

Prácticas V 24/01/2025: Hoja 4

17. (2) Tenemos $F = L(a, b, c)$. Escribimos las coordenadas de los vectores anteriores en las columnas de una matriz, para hallar la dimensión de F y una base de F: $M_F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ tiene rango 3, **si** $\operatorname{car} K \neq 2$, ya que $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} = -4 \neq 0$, luego $\dim F = \operatorname{rg} M_F = 3$ y (a, b, c) es una base de F.

Tenemos $G = L(d, e)$. Escribimos las coordenadas de los vectores anteriores en las columnas de una matriz, para hallar la dimensión de G y una base de G: $M_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, **si** $\operatorname{car} K \neq 2$, ya que $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, luego $\dim G = \operatorname{rg} M_G = 2$ y (d, e) es una base de G.

Ampliamos a, b, c a una base de $\mathbb{K}^4$, añadiendo, por ejemplo, e_3 (ya que $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} = (-4)(-1)^{4+3} \neq 0$), luego $e_3 + F$ es una base de $\mathbb{K}^4/F$ y $\dim \mathbb{K}^4/F = 4 - 3 = 1$.

Ampliamos d, e a una base de $\mathbb{K}^4$, añadiendo, por ejemplo, e_2, e_4 (ya que $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2(-1)^{4+4}(-1)^{3+2} \neq 0$), luego $e_2 + G, e_4 + G$ es una base de $\mathbb{K}^4/G$ y $\dim \mathbb{K}^4/G = 4 - 2 = 2$.

Tenemos $F + G = L(a, b, c, d, e)$. Escribimos las coordenadas de los vectores anteriores en las columnas de una matriz, para hallar la dimensión de $F + G$ y una base de $F + G$:

$$M_{F+G} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \text{ Haciendo dos TEC, llegamos a } \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b-2a & c & d-a & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

y observamos que $b-2a=d-a$, de donde se deduce que $G=L(a,b,c,d,e)=L(a,b-2a,c,d-a,e)=L(a,b-2a,c,e)$ y tenemos, a la vista de la última matriz, $\det\begin{pmatrix}1&0&0&2\\2&-2&2&3\\3&-4&4&0\\4&-2&4&1\end{pmatrix}\neq 0$, luego $4=\operatorname{rg} M_{F+G}=\dim(F+G)$ y $(a,b-2a,c,e)$ es una base de $F+G$. También lo es (a,b,c,e). Deducimos que $\mathbb{K}^4=F+G$ y que $\dim(F\cap G)=3-2-4=1$. De los cálculos anteriores se sigue que $b-a=d\in F\cap G$ luego este vector constituye una base de $F\cap G$.

Tenemos $\dim(\mathbb{K}^4/(F+G))=4-4=0$, luego $\mathbb{K}^4/(F+G)=\{0\}$ no tiene base. Por otro lado, $\dim(\mathbb{K}^4/(F\cap G))=4-1=3$ y una base de $\mathbb{K}^4/(F\cap G)$ es $(e_2+(F\cap G),e_3+(F\cap G),e_4+(F\cap G))$ ya que $\det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\2&0&0&1\end{pmatrix}=1\neq 0$.

Prácticas V 07/02/2025: Hoja 5

1.

a. dados $a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, $b(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$, tenemos $(a+b)(x)=a_0+b_0+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n$, $a'(x)=a_1x+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$, $b'(x)=b_1x+2b_2x\cdots+nb_nx^{n-1}$ y $(a+b)'(x)=a_1+b_1+2(a_2+b_2)x\cdots+n(a_n+b_n)x^{n-1}$, de donde, sumando, se concluye que $(a+b)'(x)=a'(x)+b'(x)$.

b. dados $\lambda\in\mathbb{K}$ y $a(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, tenemos $(\lambda a)(x)=\lambda a_0+\lambda a_1x+\cdots+\lambda a_nx^n$, $(\lambda a)'(x)=\lambda a_1x+2\lambda a_2x+\cdots+n\lambda a_nx^{n-1}=\lambda(a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1})=\lambda a'(x)$.

También podemos argumentar que es sabido que los polinomios (en una variable) son funciones (de una variable), que la derivada de la suma de funciones es la suma de las derivadas y que la derivada de un escalar por una función es el escalar por la derivada de dicha función.

EJERCICIO: Sea $(V,\langle,\rangle)$ un espacio vectorial euclideano. Demuestra que vectores no nulos y ortogonales dos a dos son linealmente independientes. Dados $v_1,v_2,\dots,v_n\in V\setminus\{0\}$ ortogonales dos a dos y $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ y supongamos $0=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n$. Entonces, para cada $j=1,2,\dots,n$, mutiplicando por v_j obtenemos $0=\langle 0,v_j\rangle=\langle\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n,v_j\rangle==\lambda_1\langle v_1,v_j\rangle+\lambda_2\langle v_2,v_j\rangle+\cdots+\lambda_n\langle v_n,v_j\rangle$ y de todos estos sumandos, solo uno puede ser no nulo: este es $\lambda_j\langle v_j,v_j\rangle=\lambda_j\|v_j\|^2$. Deducimos $0=\lambda_j\|v_j\|^2$ y, al ser $\|v_j\|^2\neq 0$ (ya que v_j es no nulo), llegamos a que $0=\lambda_j$.

Prácticas V 14/02/2023: Hoja 5

20.

a. Basta comprobar que los vectores $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ son li, para lo cual es suficiente ver que $3 = \operatorname{rg} P$ donde $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y como $\det P = -20$, lo que sigue es cierto solo cuando el cuerpo $\mathbb{K}$ tiene característica distinta de 2 y 5.

b. La matriz A de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es, por definición, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Como P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$, entonces, la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$ es $P^{-1}A$.

OTRA MANERA DE HALLAR la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$: es obvio que la matriz pedida tiene este aspecto: $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & \nu \end{pmatrix}$ y que λ, μ, ν satisfacen la siguiente condición (que se traducirá en un SLNH 3EC 3INCOG que habrá que escribir y resolver)

$$f(v_4) = u_1 - u_3 = \lambda(2u_1 + u_2 - u_3) + \mu(u_1 - u_2 - 2u_3) + \nu(2u_1 - 2u_2 + 4u_3)$$

24. ESTE EJERCICIO SOLO ES VÁLIDO CUANDO $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$. La aplicación f es lineal ya que

a. $f(A+B) = (A+B)-(A+B)^T = A+B-A^T-B^T = f(A)+f(B), \forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$,
b. $f(\lambda A) = \lambda A - (\lambda A)^T = \lambda A - \lambda(A^T) = \lambda(A - A^T) = \lambda f(A), \forall A \in M_n(\mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Tenemos

$$\ker f = \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A = A^T\} = M_n^{sim}(\mathbb{K}) \tag{2}$$

$$\operatorname{im} f = \{A - A^T : A \in M_n(\mathbb{K})\} \subseteq M_n^{anti}(\mathbb{K}) \tag{3}$$

el contenido anterior debido a que $A - A^T$ es antisimétrica, pues $(A-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A$. Sabemos que

$$M_n(\mathbb{K}) = M_n^{sim}(\mathbb{K}) \oplus M_n^{anti}(\mathbb{K}), \text{ con } \dim M_n^{sim}(\mathbb{K}) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ y } \dim M_n^{anti}(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2},$$

y $n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$. De $n^2 = \dim M_n(\mathbb{K}) = \dim \ker f + \dim \operatorname{im} f = \frac{n(n+1)}{2} + \dim \operatorname{im} f$ deducimos que en (3) tenemos igualdad.[5] En particular, $\ker f \cap \operatorname{im} f = M_n^{sim}(\mathbb{K}) \cap M_n^{anti}(\mathbb{K}) = \{0\}$ y $\ker f + \operatorname{im} f = M_n^{sim}(\mathbb{K}) + M_n^{anti}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$ y podemos escribir $M_n(\mathbb{K}) = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

[5] OTRA FORMA DE DEMOSTRAR IGUALDAD EN (3): toma una matriz antisimétrica B cualquiera y encuentra A tal que $B = A - A^T$.

Prácticas V 28/02/2025: Hoja 8

12. La matriz de r_α respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ es R_α y la matriz de s_α respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ es S_α. Para demostrar una igualdad de aplicaciones lineales basta comprobar la correspondiente igualdad de matrices (donde la composición de aplicaciones se convierte en el producto de matrices). Así pues, basta demostrar lo siguiente

a. $R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$,
b. $S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}$,
c. $R_\alpha S_\beta = S_{\alpha+\beta}$,
d. $S_\alpha R_\beta = S_{\alpha-\beta}$,

lo que se consigue, sin dificultad, usando las conocidas fórmulas trigonométricas de coseno/seno de una suma/diferencia.

Además, *dos simetrías en $\mathbb{R}^2$ conmutan si y solo si sus ejes son perpendiculares o coincidentes.* En efecto, los ejes de simetría respectivos son $\operatorname{Fix}(s_\alpha) = L\left(\begin{pmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}\right)$ y $\operatorname{Fix}(s_\beta) = L\left(\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\\ \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\end{pmatrix}\right)$, y estas rectas son iguales o perpendiculares en los siguientes **cuatro casos**:

- $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + 2k\pi = \frac{\beta}{2} + 4k\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$,
- $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\beta}{2} + 2k\pi = \frac{\beta}{2} + (1+4k)\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$,
- $\frac{\alpha}{2} = \pi + \frac{\beta}{2} + 2k\pi = \frac{\beta}{2} + (2+4k)\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$,
- $\frac{\alpha}{2} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\beta}{2} + 2k\pi = \frac{\beta}{2} + (3+4k)\frac{\pi}{2}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Por el apartado segundo, $s_\alpha \circ s_\beta = s_\beta \circ s_\alpha$ si y sólo si $r_{\alpha-\beta} = r_{\beta-\alpha}$ si y sólo si existe $n \in \mathbb{Z}$ entero tal que $\alpha - \beta = \beta - \alpha + 2n\pi$ si y sólo si $2\alpha = 2\beta + 2n\pi$ si y sólo si $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} + n\frac{\pi}{2}$. Esto es equivalente a que suceda alguno de los cuatro casos anteriores, ya que dado $n \in \mathbb{Z}$ existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que se verifica que una de las sigientes condiciones:

- $n = 4k$,
- $n = 1 + 4k$,
- $n = 2 + 4k$,
- $n = 3 + 4k$.

Las rectas son perpendiculares (cuando n es impar) y son coincidentes (cuando n es par). En la figura 1 vemos cómo se transforma un vector cualquiera, por ejemplo e_1, mediante las composiciones de rotaciones y simetrías estudiadas.

Prácticas V 07/03/2025: Hoja 8

11. (1) Como σ_1 es la simetría respecto del plano $y = 0$, es obvio que $\sigma_1(e_2) = -e_2$, $\sigma_1(e_1) = e_1$, $\sigma_1(e_3) = e_3$, luego la matriz S_1 de σ_1 respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ es $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Como σ_2 es la simetría respecto del plano $x = y$, es obvio que $\sigma_2(e_1) = e_2$, $\sigma_2(e_2) = e_1$, $\sigma_2(e_3) = e_3$, luego la matriz S_2 de σ_2 respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la matriz S_3 de σ_3 respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ con la *igualdad de Householder*: $S_3 = I - 2A_3$ donde $A_3 = uu^T$ y u es un vector unitario perpendicular al plano H_3: por ejemplo $u = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, quedando $A_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ y $S_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Observamos que $\det(S_j) = -1 < 0$ y $\operatorname{tr}(S_j) = 1$ para $j = 1, 2, 3$ (tal como dice la clasificación de isometrías de $\mathbb{R}^3$). Deducimos que $\det(S_3S_2S_1) = \det(S_3)\det(S_2)\det(S_1) = (-1)^3 = -1 < 0$, luego $f = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ es una isometría de $\mathbb{R}^3$ que invierte la orientación.

Tenemos $S_3S_2S_1 = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ luego $\operatorname{tr}(S_3S_2S_1) = 1/3$. La clasificación de isometrías de $\mathbb{R}^3$ nos dice que f es una roto–simetría con traza $1/3 = 2\cos\alpha - 1$, luego $\cos\alpha = 2/3$ y, y $\operatorname{sen}^2\alpha = 1 - (\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$. Usando la calculadora, obtenemos $\alpha \simeq \pm 0,8144$ radianes (el signo de α no está determinado aun).

Sabemos que el único vector fijo de f es el cero. Sabemos que $f = r_{u,\alpha} \circ s_{E^\perp} = s_{E^\perp} \circ r_{u,\alpha}$, donde u es un vector unitario (que depende de f) y $E = L(u)$. Se puede calcular u (ya que es un vector que se invierte por f, i.e., $f(u) = -u$). Obtenemos $V_{-1}(f) = \ker(f + \mathrm{id})$ está dado por las ecuaciones $y = 0$, $x = 2y$ de modo que podemos tomar $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$. Finalmente, usando el ejercicio H8P16, obtenemos $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{a}(q_{32} - (2 - \cos\alpha)\, bc) = \frac{\sqrt{5}}{2}(\frac{2}{3} - 0) = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Por tanto $\alpha \simeq +0,8144$ radianes. También se puede hallar $\operatorname{sen}\alpha$ a partir de la traza de la matriz $S_3S_2S_1B$ y se llega al mismo resultado.

De las composiciones de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en otros órdenes (hay $3! - 1 = 6 - 1 = 5$ en total, aparte de f) podemos afirmar lo siguiente:

- todas tienen determinante -1 y traza $1/3$ (ya que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$)
- todas son roto–simetrías $r_{u,\alpha} \circ s_{E^\perp} = s_{E^\perp} \circ r_{u,\alpha}$, con $\alpha \simeq \pm 0,8144$ radianes.
- lo que cambia en cada caso es el vector unitario u.

Ampliación: Observamos que $S_j = S_j^T$ para $j = 1, 2, 3$. ¿Qué significado tiene esto? (buscar algún ejercicio en la hoja 8 que nos ilumine). En cambio $S_3S_2S_1 \neq (S_3S_2S_1)^T$.

Hoja 7

3. Resuelvo algunos apartados. Los restantes son similares.

c. Si λ es autovalor de f, entonces existe $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$. Si $k \in \mathbb{N}$ entonces $f^k(v) = f^{k-1}(f(v)) = f^{k-1}(f(v)) = f^{k-1}(\lambda v) = \lambda f^{k-1}(v)$. Repitiendo esto k veces, llegamos a $f^k(v) = \lambda^k v$.

d. Si λ^2 es autovalor de f^2, entonces existe $0 \neq v \in V$ tal que $f^2(v) = \lambda^2 v$. Surgen 3 casos:

  a) Si $f(v) + \lambda v \neq 0$, calculamos $f(f(v) + \lambda v) = f^2(v) + \lambda f(v) = \lambda^2 v + \lambda f(v) = \lambda(\lambda v + f(v))$, lo que prueba que λ es autovalor de f.

  b) Si $f(v) - \lambda v \neq 0$, calculamos $f(f(v) - \lambda v) = f^2(v) - \lambda f(v) = \lambda^2 v - \lambda f(v) = -\lambda(f(v) - \lambda v)$, lo que prueba que $-\lambda$ es autovalor de f.

  c) Si $f(v) + \lambda v = 0$ y $f(v) - \lambda v = 0$, restando obtenemos $2\lambda v = 0$ y, al ser $v \neq 0$, deducimos $\lambda = 0$ y de ahí $f(v) = 0v = 0$, lo que prueba que $\lambda = 0$ es autovalor de f.

e. Si $f^2 = f$ y $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, entonces $f^2(v) = \lambda^2 v$ (por el apartado c) y deducimos $\lambda^2 v = \lambda v$, de donde $0 = (\lambda^2 - \lambda)v = \lambda(\lambda - 1)v = 0$ y, al ser $v \neq 0$, deducimos $\lambda = 0$ ó $\lambda - 1 = 0$.

Si $f^2 = \mathrm{id}$ y $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, entonces $v = f^2(v) = \lambda^2 v$ (por el apartado c) y deducimos $0 = (1-\lambda^2)v = (1-\lambda)(1+\lambda)v$, y, al ser $v \neq 0$, deducimos $\lambda + 1 = 0$ ó $\lambda - 1 = 0$.

Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = 0$ y $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, entonces $0 = 0(v) = f^k(v) = \lambda^k v$ (por el apartado c) y, al ser $v \neq 0$, deducimos $\lambda^k = 0$ luego $\lambda = 0$.

f. Si $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces $(f - a\,\mathrm{id})(v) = f(v) - av = \lambda v - av = (\lambda - a)v$. Por tanto, $\mathrm{sp}(f - a\,\mathrm{id}) = \{\lambda - a : \lambda \in \mathrm{sp}(f)\}$.

g. Si $v \in V$ es autovector de f, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Por el apartado c tenemos $f^k(v) = \lambda^k v$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Si

$$p(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0\,\mathrm{id}$$

para ciertos $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{K}$, entonces

$$p(f)(v) = (a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0\,\mathrm{id})(v) = a_n f^n(v) + a_{n-1} f^{n-1}(v) + \cdots + a_1 f(v) + a_0\,\mathrm{id}(v) =$$

$$= a_n \lambda^n v + a_{n-1} \lambda^{n-1} v + \cdots + a_1 \lambda v + a_0 v = p(\lambda) v,$$

con $p(\lambda) \in \mathbb{K}$. Ejemplo: $p(f) = 7f^5 - 3f^2 + 25$, $p(f)(v) = (7\lambda^5 - 3\lambda^2 + 25)v$.

Prácticas V 04/04/2025: Hoja 10

9. HALLAR TAMBIÉN $\mathrm{d}(r, s)$ **Y DECIDIR SI** r **Y** s **SON PERPENDICULARES.** r es recta afín ya que es el conjunto de soluciones de un SLNH 4EC 5INCOG con matriz de coeficientes ampliada $(A|B) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{rg}(A|B) = \mathrm{rg}\, A = 4 = 5 - 1$. Análogamente vemos que s es plano afín.

a. r y s se cruzan y son perpendiculares, pues $r \cap s = \emptyset$ (ya que $1 = x_1 = 0$ es absurdo en el cuerpo $\mathbb{R}$), $\operatorname{dir} r = L(e_5)$, $\operatorname{dir} s = L(e_3, e_4)$, $\operatorname{dir} r \not\subseteq \operatorname{dir} s$, $\operatorname{dir} r \not\supseteq \operatorname{dir} s$ y $\operatorname{dir} r \subseteq (\operatorname{dir} s)^\perp = L(e_1, e_2, e_5)$.

b. $P_r = (1, 0, 1, 0, 0)^T$, $P_s = (0, 1, 0, 0, 5)^T$ son puntos en r, s resp. luego

$$r + s = P_r + \operatorname{dir} r + \operatorname{dir} s + L(\overrightarrow{P_r P_s}) = P_r + \operatorname{dir}(r + s).$$

Tenemos que $\operatorname{dir}(r + s) = L(e_3, e_4, e_5, -e_1 + e_2)$, luego $r + s$ tiene dimensión 4 (i.e., $r + s$ es un hiperplano afín). Unas ecuaciones paramétricas de $r + s$ son $\begin{cases} x_1 = 1 - \delta \\ x_2 = \delta \\ x_3 = 1 + \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$ y, eliminando los parámetros, (con condición de rango o con M. Gauss–Jordan), llegamos a que una ecuación implícita de $r + s$ es $x_1 + x_2 - 1 = 0$. [OBS: no se cumple una fórmula de Grassmann semejante a la fórmula vectorial, ya que s y r no se intersecan.]

c. PRIMERA FORMA: para $\alpha \in \mathbb{R}$, sean $P_\alpha \in r$ un punto que recorre r y $t_\alpha = \mathcal{A}(P_\alpha, R)$ un recta cualquiera del *haz de rectas* que pasan por R. Buscamos α tal que $\mathcal{A}(P_\alpha, R) \cap s \neq \emptyset$. [6] Con detalle: $P_\alpha = (1, 0, 1, 0, \alpha)^T$, $t_\alpha : \begin{cases} x_1 = & 2 + \lambda \\ x_2 = & -1 - \lambda \\ x_3 = & -\lambda \\ x_4 = & 0 \\ x_5 = & -\alpha\lambda \end{cases}$ y t_α corta a s cuando $\alpha = 5/2$ y $\lambda = -2$ dando el punto $(0, 1, 2, 0, 5)^T \in s$. La recta pedida es $t_{5/2}$.

Las siguientes formas de razonar se basan en la OBS: $R \in r + s$ (ya que R satisface la ecuación $x_1 + x_2 - 1 = 0$), de donde esperamos que las intersecciones planteadas sean no vacías.

SEGUNDA FORMA: calculamos un punto $Z \in (\{R\} + s) \cap r$, y comprobamos que $\mathcal{A}(R, Z) \cap s \neq \emptyset$. La recta pedida es $\mathcal{A}(R, Z)$ (que debe coincidir con $t_{5/2}$).

[6] Si A, B son puntos distintos, $\mathcal{A}(A, B)$ denota la recta que pasa por A y B. Si $A = B$, tenemos $\mathcal{A}(A, A) = \{A\}$.

Con detalle: el subespacio suma $\{R\}+s = R+\operatorname{dir} s+L(\overrightarrow{RP_s}) : \begin{cases} x_1 = & 2-2\rho \\ x_2 = & -1+2\rho \\ x_3 = & \lambda \\ x_4 = & \mu \\ x_5 = & 5\rho \end{cases}$

y tiene dimensión 3, $Z = (1,0,1,0,5/2)^T$, $\mathcal{A}(R,Z) = R+L(\overrightarrow{RZ}) : \begin{cases} x_1 = & 2-\alpha \\ x_2 = & -1+\alpha \\ x_3 = & \alpha \\ x_4 = & 0 \\ x_5 = & 5\alpha/2 \end{cases}$

y $\mathcal{A}(R,Z) \cap s$ es el punto $(0,1,2,0,5)^T$.

TERCERA FORMA: calculamos $H \in (\{R\}+r)\cap s$, y comprobamos $\mathcal{A}(\{R\},H)\cap r \neq \emptyset$. La recta pedida es $\mathcal{A}(R,H)$ (que debe coincidir con $t_{5/2}$). Los detalles son parecidos.

CUARTA FORMA: la recta buscada es $(\{R\}+r)\cap(\{R\}+s)$. Tenemos $\{R\}+r$: $\begin{cases} x_1 = & 2+\alpha \\ x_2 = & -1-\alpha \\ x_3 = & -\alpha \\ x_4 = & 0 \\ x_5 = & \beta \end{cases}$ y la intersección cumple $\begin{cases} -2\rho = \alpha \\ 2\rho = -\alpha \\ \lambda = -\alpha \\ \mu = 0 \\ 5\rho = \beta \end{cases}$ de donde $\beta = \frac{-5}{2}\alpha$, luego

$(\{R\}+r)\cap(\{R\}+s) : \begin{cases} x_1 = & 2+\alpha \\ x_2 = & -1-\alpha \\ x_3 = & -\alpha \\ x_4 = & 0 \\ x_5 = & \frac{-5}{2}\alpha \end{cases}$ debe ser la recta $t_{5/2}$.

d. $\operatorname{d}(r,s) = \|p_{W^\perp}(\overrightarrow{P_rP_s})\| = \sqrt{2}$. En efecto: $L = s + \operatorname{dir} r : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \nu \\ x_5 = 5+\lambda \end{cases}$ y su dirección es $W = L(e_3,e_4,e_5)$, y tenemos $p_L(P_s) = P_r + p_W(\overrightarrow{P_rP_s}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} +$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, luego $p_{W^\perp}(\overrightarrow{P_rP_s}) = \overrightarrow{P_rP_s} - p_W(\overrightarrow{P_rP_s}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene norma $\sqrt{2} = \mathrm{d}(r, s)$.

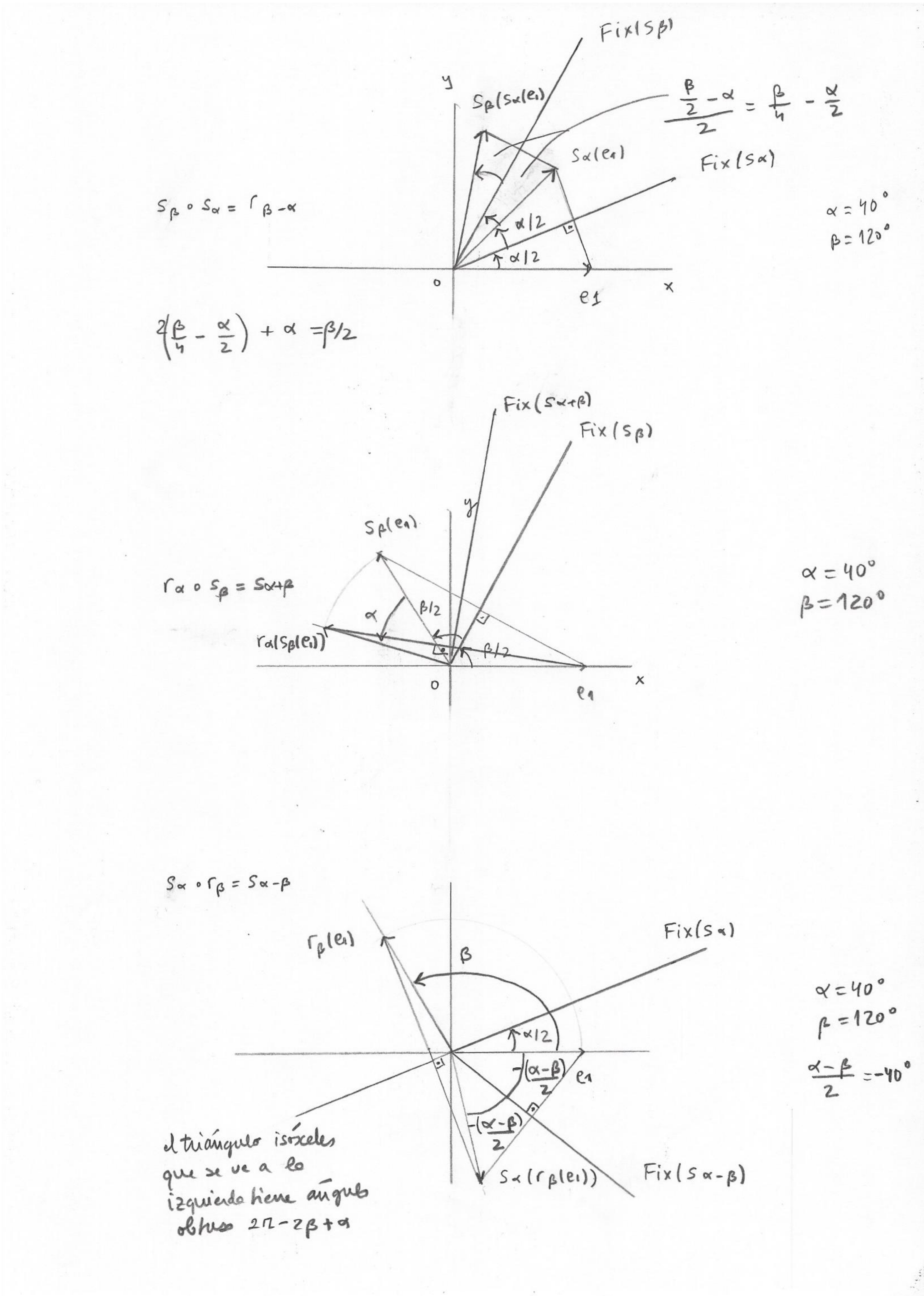

FIGURA 1. Composición de dos isometrías en el plano real.