ÁLGEBRA LINEAL
Hoja 4

<u>*Advertencia:*</u> colocaremos las coordenadas de vectores y puntos de $\mathbb{K}^n$ en **columnas**.

Ejercicio 1.

1. Dados vectores u_1, u_2, u_3 linealmente independientes en un espacio vectorial V, se consideran los subespacios vectoriales $U = L(u_1 + u_2, u_2 + u_3)$ y $W = L(u_1 + u_2 + u_3, u_2 - u_3)$. ¿Cuál es la dimensión de $U \cap W$?

2. En $\mathbb{K}^3$ se consideran los subespacios vectoriales
$$U : x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$W = L((1,1,1)^T, (1,1,0)^T, (-1,-1,1)^T)$$
   a) Calcular unas ecuaciones paramétricas, la dimensión y una base de U.
   b) Calcular unas ecuaciones implícitas, la dimensión y una base de W.
   c) Determinar los subespacios vectoriales $U \cap W$ y $U + W$.

3. Se consideran los subespacios vectoriales
$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}) : a, b \in \mathbb{K} \right\}, \quad V_2 : \begin{cases} a+b+c+d = 0 \\ 2a - c - d = 0 \end{cases}$$
donde $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Calcular unas ecuaciones paramétricas, unas ecuaciones implícitas, una base y la dimensión de los subespacios $V_1 \cap V_2$ y $V_1 + V_2$.

4. En $\mathbb{K}^4$ se consideran los subespacios vectoriales
$$U = L((1,-1,2,1)^T, (0,1,-1,3)^T, (2,0,1,-1)^T)$$
$$W : \begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ x - 2y + 6z - 6t = 0 \end{cases}$$
Calcular la dimensión, una base y ecuaciones paramétricas e implícitas de $U, W, U \cap W$ y $U + W$.

5. En $\mathbb{K}^4$ se consideran los subespacios vectoriales $U : y + z + t = 0$ y $W : x + y = z - 2t = 0$. Hallar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de U, W, $U \cap W$ y $U + W$.

Ejercicio 2. Sean $a, b \in \mathbb{K}$ y consideremos los subespacios

$$U : \begin{cases} bx_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad W : \begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Calcular las dimensiones de U y W.
2. ¿Existen valores de a y b para los que $U = W$?
3. ¿Cómo deben tomarse a y b para que $U \neq W$ y $U + W \neq \mathbb{K}^4$?

Ejercicio 3. Sea U el hiperplano vectorial de $\mathbb{K}^3$ de ecuación $x + y + z = 0 = z$. Determina un subespacio W de $\mathbb{K}^3$ de forma que $U \cap W = \{0\}$ y $U + W$ tenga por ecuación cartesiana $x + y + z = 0$.

Ejercicio 4. Sean F, G, H, subespacios del espacio vectorial E. Demostrar o dar contraejemplos de las afirmaciones siguientes:

1. $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$,(indicación: es falsa)
2. $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$,(indicación: es verdadera)
3. $\dim(F \cap (G + H)) = \dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(F \cap H \cap G)$, (indicación: es falsa).

Ejercicio 5.

1. Denotamos por $M_n^{sim}(\mathbb{K})$ al conjunto formado por las **matrices simétricas** y por $M_n^{anti}(\mathbb{K})$ al conjunto formado por las **matrices antisimétricas**. Probar que son subespacios vectoriales de $M_n(\mathbb{K})$ y que $M_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})^{sim} \oplus M_n^{anti}(\mathbb{K})$. Calcula bases y dimensiones de ambos subespacios. [Aquí, se supone $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.]
2. Sea $GL_n(\mathbb{K})$ el conjunto formado por las matrices cuyo determinante es no nulo. ¿Es $GL_n(\mathbb{K})$ un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{K})$? Demuestra que $GL_n(\mathbb{K})$ es un grupo con la multiplicación.
3. Sea $SL_n(\mathbb{K})$ el conjunto formado por las matrices cuyo determinante es 1. ¿Es $SL_n(\mathbb{K})$ un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{K})$? Demuestra que $SL_n(\mathbb{K})$ es un grupo con la multiplicación.

4. Denotamos por $M_n^{orto}(\mathbb{R})$ al subconjunto de **matrices ortogonales**, ¿es $M_n^{orto}(\mathbb{R})$ un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{R})$? Demuestra que $M_n^{orto}(\mathbb{K})$ es un grupo con la multiplicación. (Recordemos que A es **ortogonal** si $AA^T = I_n = A^T A$.) [La notación más habitual para $M_n^{orto}(\mathbb{R})$ es $O_n(\mathbb{R})$, que junto con $GL_n(\mathbb{K})$ y $SL_n(\mathbb{K})$ se llaman **grupos clásicos**.]

Ejercicio 6. Para cada $a \in \mathbb{K}$ se considera el subespacio vectorial H_a de $\mathbb{K}^3$ de ecuación $ax - y + z = 0$. Además, tomamos $M = L(u)$ siendo $u = (1,1,1)^T \in \mathbb{K}^3$. ¿Para qué valores de a se cumple que $\mathbb{K}^3 = H_a \oplus M$?

Ejercicio 7. Se considera la base estándar $\mathcal{B} = (1, t, t^2, t^3)$ de $\mathbb{K}[t]_3$ y para cada $a \in \mathbb{K}$, el subespacio vectorial $H_a = \{f \in \mathbb{K}[t]_3 : f(a) = 0\}$.

1. Hallar una base y la dimensión de H_a. Obtener ecuaciones implícitas y paramétricas de H_a.

2. Sean a y $b \in \mathbb{K}$ distintos. Hallar una base de $H_a \cap H_b$ y calcular su dimensión. Obtener ecuaciones implícitas y paramétricas de $H_a \cap H_b$ respecto de $\mathcal{B}$.

3. Probar que todo polinomio de $\mathbb{K}[t]_3$ se puede escribir como suma de un polinomio de H_a y otro de H_b.

Ejercicio 8. En $\mathbb{K}^3$ se consideran los subespacios

$$U : \begin{cases} x = \lambda + \gamma \\ y = \mu + \gamma \\ z = \lambda + \mu + 2\gamma \end{cases} \qquad W : x - y + 2z = 0$$

Se pide:

1. Bases de U, W, $U + W$ y $U \cap W$.

2. Ecuaciones implícitas de $U \cap W$.

3. Una base de un subespacio suplementario de $U + W$.

4. Coordenadas de $(2,3,5)^T$ respecto de la base de $U + W$ obtenida en el primer apartado.

Ejercicio 9.

1. Hallar una base y dimensión del subespacio vectorial $U : x + y = z + t = 0$ de $\mathbb{K}^4$.
2. Obtener unas ecuaciones paramétricas de U.
3. Sea el subespacio $W = L(v_1, v_2, v_3) \subseteq \mathbb{K}^4$ donde $v_1 = e_1 + e_2, v_2 = e_1 + e_3$ y $v_3 = e_1 + e_4$. Hallar unas ecuaciones implícitas de U y una base de W.
4. Calcular las dimensiones de $U \cap W$ y $U + W$.

Ejercicio 10. Sea $n > 2$ un número entero y sean H y H' dos subespacios vectoriales de dimensión $n-1$ (i.e., hiperplanos) de un espacio vectorial E de dimensión n, siendo $H \neq H'$. Probar que todo vector de E es suma de un vector de H y otro de H' y calcular la dimensión que tiene el subespacio intersección $H \cap H'$.

Ejercicio 11.

1. En $\mathbb{K}_3[x]$ con la base $\mathcal{B} = (x^3, x^2, x, 1)$ se consideran los siguientes subespacios vectoriales

$$U = L(x^2+2x, -x^2+x, x^2+x) \qquad V : \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\beta \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \alpha + \beta \end{cases} \qquad W : \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

   Calcular bases, dimensión y ecuaciones (tanto paramétricas como implícitas) de los subespacios U, V y W. También para $U \cap V$, $U \cap W$, $V \cap W$, $U + V$, $U + W$ y $V + W$.

2. Sean los subespacios vectoriales de $\mathbb{K}^4$:

$$U = L((1,1,0,-1)^T, (1,2,3,0)^T, (2,3,3,-1)^T)$$

$$W = L((1,2,2,-2)^T, (2,3,2,-3)^T, (1,3,4,-3)^T)$$

   Hallar las dimensiones de $U + W$ y $U \cap W$.

Ejercicio 12. Encontrar una base del subespacio $U : x + y = z - y = 0$ y calcular su dimensión. Prolongar dicha base a una de $\mathbb{K}^4$.

Ejercicio 13. Si $1 \leq r \leq n$ y $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ es una base de V, demostrar que $V = U \oplus W$, donde $(v_1, \ldots, v_r)$ es base de U y $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ es base de W. Recíprocamente, si $V = U \oplus W$, donde $(v_1, \ldots, v_r)$ es base de U y $(v_{r+1}, \ldots, v_n)$ es base de W entonces $(v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ es base de V.

Ejercicio 14.

1. En $\mathbb{Q}^4$ sean $H : x - y = z + t = 0$ y $U \subset \mathbb{Q}^4$ generado por $(1, -1, 0, 0)^T$, $(1, 0, -1, 0)^T$ y $(1, 0, 0, -1)^T$. Hallar bases, dimensiones y ecuaciones implícitas y paramétricas de H, U, $H \cap U$ y $H + U$.

2. Hallar la dimensión y una base del subespacio $W \subset \mathbb{Q}^5$ dado por

$$\begin{cases} x + 2y + 2z - s + 3t = 0 \\ x + 2y + 3z + s + t = 0 \\ 3x + 6y + 8z + s + 5t = 0. \end{cases}$$

3. Sean los subespacios $U = L((1, 3, -2, 2, 3)^T, (1, 4, -3, 4, 2)^T, (2, 3, -1, -2, 9)^T)$ y $W = L((1, 3, 0, 2, 1)^T, (1, 5, -6, 6, 3)^T, (2, 5, 3, 2, 1)^T)$ de $\mathbb{Q}^5$. Hallar una base y la dimensión de $U \cap W$.

4. Dados los subespacios de $\mathbb{Q}^4$, $U = L((1, 2, 1, 3)^T, (0, 1, 2, 1)^T, (6, 11, 4, 17)^T)$ y $W : 4x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$. Hallar unas ecuaciones paramétricas e implícitas de $U + W$ y de $U \cap W$. ¿Es $U + W$ una suma directa?

5. Sean U, W subespacios de $\mathbb{Q}^3$ definidos por $U = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{Q}^3 : x = y = z\}$ y $W = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{Q}^3 : x = 0\}$.

   Hallar una base de U, otra de W y comprobar que $\mathbb{Q}^3 = U \oplus W$.

6. Consideremos los subespacios de $\mathbb{Q}^4$ dados por $U : x - y = z + t = 0$ y $W = L((2, 1, 1, 1)^T, (0, 1, -1, -1)^T, (1, 0, 1, 1)^T)$. a) Hallar una base de U y unas ecuaciones implícitas de W. b) Hallar $U \cap W$ y $U + W$. ¿Es $U + W$ suma directa? c) Si $U' = L((0, 2, 1, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T)$ hallar $U + U'$ y $W + U'$. ¿Se trata de sumas directas?

7. Sean a y b números racionales y consideremos los subespacios U y W de $\mathbb{Q}^4$

$$U : \left\{ \begin{array}{rcl} bx_1 - bx_2 + x_4 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{y } W : \left\{ \begin{array}{rcl} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 & = & 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

   a) Calcular la dimensión de U y W. ¿Existen valores de a y b para los que $U = W$?

   b) ¿Cómo han de ser a y b para que $U + W \neq \mathbb{Q}^4$?

Ejercicio 15. En $\mathbb{Q}^4$ sea el subespacio $U : x - y + z - 2t = x - 2y + z - t = 0$. Hallar unas ecuaciones implícitas de un subespacio $W \subset \mathbb{Q}^4$ tal que $\mathbb{Q}^4 = W \oplus U$. Idem $W' \subset \mathbb{Q}^4$ tal que $\mathbb{Q}^4 = W' \oplus U$ y $W \neq W'$.

Ejercicio 16.

1. En $\mathbb{K}^2$ se considera el haz de rectas paralelas a la recta de ecuación $3x+2y-6=0$. Identificar la familia anterior con el espacio cociente $\mathbb{K}^2/U$, para cierto subespacio U. Hacer una representación gráfica.

2. En $\mathbb{K}^3$ se considera el haz de planos paralelos al plano de ecuación $3x+2y-6=0$. Identificar la familia anterior con el espacio cociente $\mathbb{K}^3/U$, para cierto subespacio U. Hacer una representación gráfica.

3. En $\mathbb{K}^3$ se considera el haz de rectas paralelas a la recta de ecuaciones $x=3, y=7$. Identificar la familia anterior con el espacio cociente $\mathbb{K}^3/U$, para cierto subespacio U. Hacer una representación gráfica.

Ejercicio 17.

1. Sean $V = \mathbb{K}^5$ y $W : x_4 = x_5 = 0$. Describe los elementos de V/W. Halla una base y la dimensión de V/W.

2. Consideremos en $\mathbb{K}^4$ los subespacios $F = L(a, b, c)$ y $G = L(d, e)$ donde $a = (1, 2, 3, 4)^T, b = (2, 2, 2, 6)^T, c = (0, 2, 4, 4)^T, d = (1, 0, -1, 2)^T$ y $e = (2, 3, 0, 1)^T$. Se pide: a) Determinar las dimensiones de $F, G, F \cap G, F + G$ y dar una base de cada subespacio. b) Dar bases de los espacios cociente $\mathbb{K}^4/F$, $\mathbb{K}^4/G$, $\mathbb{K}^4/(F+G)$ y $\mathbb{K}^4/(F \cap G)$.

Ejercicio 18.

1. Sean $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, una base de un espacio vectorial E, $v_1 = u_1 + u_3, v_2 = u_1 + u_2 - u_3 - u_4$ y $W = L(v_1, v_2)$. Se pide:

   a) Encontrar en E dos vectores linealmente independientes cuyas clases sean (resp. no sean)linealmente independientes en el cociente E/W.

   b) Encontrar cuatro vectores linealmente independientes en E cuyas clases en E/W no sumen 0 y de modo que existan vectores proporcionales a ellos cuyas clases sí lo sumen.

2. Sea $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ una base del espacio vectorial E y consideremos el subespacio vectorial

$$W : \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} .$$

   a) Obtener una base de E/W y, calcular con respecto a ella, las coordenadas de la clase $[v]_W$ siendo $v = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$.

   b) Encontrar vectores independientes en $E \setminus W$ tales que sus clases en E/W no sean independientes.

   c) Encontrar si es posible (cuatro) vectores linealmente independientes en E cuyas clases en E/W no sumen 0 pero de tal modo que existan vectores proporcionales a ellos cuyas clases sí lo sumen.

Ejercicio 19. *Una construcción del cuerpo* $\mathbb{C}$. Sea

$$U = \{(x^2 + 1)p(x) : p(x) \in \mathbb{R}[x]\}.$$

Demostrar que U es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$ y que $\mathbb{R}[x]/U$ es isomorfo a $\mathbb{C}$, como $\mathbb{R}$–espacios vectoriales. ¿Qué dimensión tienen? Mediante el isomorfismo anterior, trasladar la multiplicación de $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}[x]/U$ y demostrar que $\mathbb{R}[x]/U$ es un cuerpo.

Otra construcción del cuerpo $\mathbb{C}$. Sea

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Demostrar que U, como subespacio vectorial de $M_2(\mathbb{R})$, es isomorfo a $\mathbb{C}$. Demostrar que U es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.