

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 5

Advertencia: colocaremos las coordenadas de vectores y puntos de $\mathbb{K}^n$ en **columnas**.

Una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo se llama **endomorfismo**.

Ejercicio 1. La **aplicación derivada** de $f : \mathbb{K}[x]_n \rightarrow \mathbb{K}[x]_{n-1}$ asigna a cada polinomio $p(x)$ su polinomio derivado, $p'(x)$. Probar que f es lineal. [Obs: se puede poner $\mathbb{K}[x]_n$ como espacio de llegada, también].

Ejercicio 2. Si $X = X_1 \oplus X_2$, entonces cada vector x de X se puede escribir (de modo único) como $x = x_1 + x_2$ siendo $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$. Pruébese que la aplicación $x \mapsto x_1$ es lineal.

Ejercicio 3. a) ¿Existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}^2$ tal que

$$f((1, 0)^T) = (1, 1)^T, \quad f((3, 2)^T) = (1, -1)^T \quad f((3, 3)^T) = (2, 2)^T?$$

b) Dados vectores $u_1, \dots, u_s \in U$ y $v_1, \dots, v_s \in V$, ¿qué condiciones deben cumplirse para que exista una única aplicación lineal $f : U \rightarrow V$ tal que $f(u_i) = v_i$, para $i = 1, \dots, s$?

Ejercicio 4. Sea $f : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal tal que

$$f(v_1) = v'_1 + v'_2 \quad f(v_2) = 2v'_1 - v'_2 \quad f(v_3) = 3v'_1 + 2v'_2 \quad f(v_4) = v'_1 + 2v'_2$$

donde $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $\mathcal{B}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ son unas bases de V y V' , respectivamente. Determinar la matriz de f con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

Ejercicio 5. Sea $f : V \rightarrow V$ un endomorfismo y sean $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ y $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_n)$, dos bases de V . Si $f(u_i) = v_i$ para todo $i = 1 \dots n$, probar que la matriz de f respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es la identidad, I_n .

Ejercicio 6. Consideramos un endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ de la forma $f((x_1, x_2, x_3)^T) = (x'_1, x'_2, x'_3)^T$. Hallar la matriz del endomorfismo y unas ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo y de la imagen en los siguientes casos:

a) $x'_1 = x_1 + x_2 + x_3, \quad x'_2 = x_1 - x_2 + x_3, \quad x'_3 = x_1 + x_3.$

b) $x'_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \quad x'_2 = 2x_1 + x_2 + x_3, \quad x'_3 = -x_1 + x_2 + 2x_3.$

En cada caso indica si f es inyectiva o sobreyectiva.

Ejercicio 7. Comprobar que la aplicación $f : \mathbb{R}[x]_3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p(x)) = \int_0^1 p(x)dx$, es lineal. Calcular su matriz asociada respecto de las bases $(1, x, x^2, x^3)$ de $\mathbb{R}[x]_3$ y 1 de $\mathbb{R}$. [Obs: se puede generalizar a cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y cualquier $n \in \mathbb{N}$.]

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ el endomorfismo dado por $f((x_1, x_2, \dots, x_n)^T) = (x_1, x_2, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T$ con $0 \leq k \leq n$. Determinar el núcleo y la imagen de f .

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$ un endomorfismo tal que $f((1, 0, 1, 0)^T) = (2, 1, -1, 0)^T$, $f((0, 1, -1, 0)^T) = (0, -1, 1, 0)^T$ y $\ker f : x + z = 0 = x - y + t$.

1. Hallar la matriz de f respecto de la base canónica.

2. Hallar una base y la dimensión de $\mathbb{K}^4/\ker f$ y describir las clases de equivalencia.

Ejercicio 10. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ definido por $y_1 = 3x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = -x_1 + 4x_2 - 2x_3$, $y_3 = 2x_1 + 6x_2 - x_3$. Se pide:

- a) Calcular $\ker f$ y una base de un subespacio W de $\mathbb{K}^3$ suplementario de $\ker f$ (es decir, $\ker f \oplus W = \mathbb{K}^3$).
- b) Comprobar que la imagen por f de la base calculada en el apartado anterior es una base de $\operatorname{Im} f$.

Ejercicio 11. En $\mathbb{K}^3$ se considera el endomorfismo dado por

$$f((1, 1, 1)^T) = (2, 3, 3)^T \quad f((1, 1, 0)^T) = (1, 3, 2)^T \quad f((1, 0, 0)^T) = (0, 1, 1)^T.$$

- a) Calcular la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^3$.
- b) Hallar la dimensión y una base del núcleo y la imagen de f .
- c) Obtener la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B}' = ((1, 1, 1)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 0, 0)^T)$.

Ejercicio 12. a) Demostrar que $\mathcal{B} = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3)$ es una base de $\mathbb{K}[x]_3$.

b) Hallar, respecto de $\mathcal{B}$, la matriz del endomorfismo f que a cada polinomio de $\mathbb{K}[x]_3$ le hace corresponder su derivada segunda.

- c) Hallar los subespacios $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ y sus dimensiones.
- d) Hallar los $q(X)$ tales que $f(q(x)) = 6x + 8$, de dos maneras: con matrices e integrando.

Ejercicio 13. Prueba las siguientes propiedades de una aplicación lineal $f : V \rightarrow V'$.

- a) Si $u_1, \dots, u_n \in V$ son linealmente dependientes, entonces $f(u_1), \dots, f(u_n)$ son linealmente dependientes.
- b) Si f es inyectiva y si $u_1, \dots, u_n \in V$ son linealmente independientes, entonces $f(u_1), \dots, f(u_n)$ son linealmente independientes.

Ejercicio 14. Sea $f : \mathbb{K}[x]_3 \rightarrow \mathbb{K}[x]_2$ la aplicación lineal que a cada polinomio $p(x)$ le hace corresponder $f(p(x)) = p'(x) - p''(x)$. Hallar la matriz de f respecto de las bases estándar y calcular matricialmente $f(q(x))$ siendo $q(x) = x^3 + 3x^2 + 7x - 6$.

Ejercicio 15. Supóngase que la aplicación lineal $f : V \rightarrow U$ es inyectiva y suprayectiva. Probar que la aplicación inversa $f^{-1} : U \rightarrow V$ es también lineal.

Ejercicio 16. ¿Qué se puede decir de una aplicación lineal $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ de espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ tal que toma solo valores reales?

Ejercicio 17. a) ¿Hay algún endomorfismo de $\mathbb{K}^{2n+1}$ tal que el núcleo y la imagen coincidan?

- b) ¿Existen espacios vectoriales U y V , con V de dimensión impar, y aplicaciones lineales $f : U \rightarrow V$ inyectiva y $g : V \rightarrow U$ sobreyectiva tales que $\operatorname{Im}(f) = \ker(g)$?

Ejercicio 18. En $\mathbb{K}^3$ se consideran los subespacios $U = L((1, 1, 1)^T)$ y $W : x + y + z = 0$. Determinar todos los endomorfismos f de $\mathbb{K}^3$ tales que $\ker f = U$ e $\operatorname{Im} f = W$ y decir cuáles de ellos son proyectores (i.e., satisfacen $f^2 = f$).

Ejercicio 19. Hallar la matriz asociada a cada los siguientes endomorfismos de $\mathbb{K}^2$,

$$f((x, y)^T) = (2y, 3x - y)^T, \quad g((x, y)^T) = (3x - 4y, x + 5y)^T,$$

con respecto de la base canónica: Hallar las matrices asociadas a f y a g respecto de la base $\mathcal{B} = ((1, 3)^T, (2, 5)^T)$.

Ejercicio 20. Sean $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $\mathcal{B}' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ bases, respectivamente, de los $\mathbb{K}$ -espacios vectoriales V y V' , y $f : V \rightarrow V'$ la aplicación lineal que cumple

$$f(v_1) = 2v'_1 + v'_2 - v'_3; \quad f(v_2) = v'_1 - v'_2 - 2v'_3; \quad f(v_3) = 2v'_1 - 2v'_2 + 4v'_3; \quad f(v_4) = v'_1 - v'_3$$

- Comprobar que $\mathcal{B}'' = (f(v_1), f(v_2), f(v_3))$ es una base de V' .
- Hallar las matrices de f respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ y respecto de $\mathcal{B}, \mathcal{B}''$ y la relación entre ellas.

Ejercicio 21. Sean $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$ y $g : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^4$ las aplicaciones lineales definidas por

$$f((x, y, z, t)^T) = (x + y, x + 3y + 2z, x + y)^T \quad y$$

$$g((x, y, z)^T) = (x + y + 2z, x + y + 2z, 2x + 2y + 4z, -3x - 3y - 6z)^T.$$

Sean $h_1 = f \circ g$ y $h_2 = g \circ f$.

- Hallar las matrices de f, g, h_1 y h_2 respecto de las bases canónicas.
- Hallar las matrices de f, g, h_1 y h_2 respecto de las bases $\mathcal{B} = ((3, 2, 5)^T, (2, 1, 3)^T, (1, 0, 2)^T)$ y $\mathcal{B}' = ((1, 0, 2, 1)^T, (0, -1, 2, 1)^T, (0, 0, 1, 1)^T, (0, 0, 0, -1)^T)$ de $\mathbb{K}^3$ y $\mathbb{K}^4$, respectivamente.

Ejercicio 22. Sean f y g dos endomorfismos de un espacio vectorial V . Se pide:

- Probar que si $f \circ g = 0$ (aplicación que lleva a todos los vectores al vector cero), entonces $\text{img} \subset \ker f$.
- Si además g es sobreyectiva, demostrar que f es nula.
- Si $f \circ g = 0$ y además f es inyectiva, demostrar que g es nula.
- Dar un ejemplo en el que $f \circ g = 0$, $\text{img} \subset \ker f$ y el contenido en el otro sentido no se verifica.

Ejercicio 23. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$. Sea $f : M_2(\mathbb{K}) \rightarrow M_2(\mathbb{K})$ la aplicación definida por $f(X) = AX - XA$ para $X \in M_2(\mathbb{K})$.

- Probar que f es lineal y calcular la matriz de f respecto de la base estándar de $M_2(\mathbb{K})$, dada por $(B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$, donde B_{ij} es la matriz que tiene un 1 en la entrada (i, j) y ceros en el resto.
- Calcular el núcleo y la imagen de f .

Ejercicio 24. Se considera la aplicación $f : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K})$ dada por

$$f(A) = A - A^T.$$

Probar que f es una aplicación lineal y calcular $\ker(f)$, $\text{im}(f)$, $\ker(f) \cap \text{im}(f)$ y $\ker(f) + \text{im}(f)$.