

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 6

Advertencia: colocaremos las coordenadas de vectores y puntos de $\mathbb{K}^n$ en **columnas**.

Ejercicio 1. Hallar la matriz de un endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ que cumple:

$$\ker f = L(e_1 + e_2 - 2e_3), \quad f(e_1 + e_2) = e_2, \quad e_1 - e_2 \in f^{-1}(2e_1).$$

Hallar además el conjunto $f^{-1}(2e_1)$ y obtener una base de $\operatorname{im} f$.

Ejercicio 2. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{K}^3$ cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Probar que $\mathcal{B}' = (e_3, f(e_3), f^2(e_3))$ es una base de $\mathbb{K}^3$ y calcular la matriz asociada a f respecto de esta base.

Ejercicio 3. Se considera la aplicación $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$ dada por

$$f((x, y, z, t)^T) = (x - ay + 2z + 3t, -ax + 2y - 2t, y + 2z + at)^T$$

Hallar los valores de a para los que f no es sobreyectiva y calcular unas ecuaciones implícitas de $\ker f$ e $\operatorname{im} f$ en tales casos.

Ejercicio 4. Sea $f : V \rightarrow V'$ la aplicación lineal cuya matriz asociada es A con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

respecto de bases $\mathcal{B}$ de V y $\mathcal{B}'$ de V' . Sea $W = L(w_1, w_2)$, subespacio de V' , donde $w_1 = (1, 0, 1)^T$ y $w_2 = (0, 1, 1)^T$. Se pide determinar los subespacios vectoriales $f^{-1}(W)$ y $f(f^{-1}(W)) = (\operatorname{im} f) \cap W$. Idem para la matriz A' .

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$ la aplicación lineal definida por

$$f((x, y, z, t)^T) = (x - z + t, 2y + 2z + 2t, -x + 4y + 5z + 3t)^T$$

Halla la matriz M asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{K}^3$ y $\mathbb{K}^4$. Encuentra bases de $\mathbb{K}^4$ y $\mathbb{K}^3$ respecto de las cuales la matriz de f sea igual a la matriz canónica equivalente $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a la matriz M , con $r = \operatorname{rg} M$.

Ejercicio 6. a) Hallar el valor de α para que la aplicación $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^3$ dada por

$$f((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = (x_1 - x_2 + 2x_3 + \alpha x_4, x_1 + x_3 + 3x_4, 3x_1 + \alpha x_2 + 5x_3 - x_4)^T$$

verifique que $\dim \ker f \geq 2$.

b) Hallar unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{im} f$ para dicho α .

Ejercicio 7. Sea $g : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ un endomorfismo cuyo núcleo es $L((1, 0, -3)^T, (0, 0, 1)^T)$ y tal que $g((0, 1, 2)^T) = (0, 1, 2)^T$. Justificar razonadamente que existe un único endomorfismo g que verifica las condiciones anteriores y obtener la matriz de g respecto de la base canónica.

Ejercicio 8. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ definida por

$$f((1, 0, 0)^T) = (2, 2, 4)^T; \quad f((1, 1, 1)^T) = (4, 5, 9)^T; \quad f((1, -1, 0)^T) = (1, 1, 2)^T.$$

- Calcular la matriz de f respecto a la base canónica.
- Calcular bases y dimensiones del núcleo y de la imagen de f .

Ejercicio 9. De una aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ se sabe que:

- La recta generada por $(1, 0, 0)^T$ tiene por imagen la recta $x = z = y$.
- La imagen del vector $(0, 1, 0)^T$ es el vector $(-2, 1, 1)^T$.
- El núcleo de f está generado por el vector $(1, 1, 1)^T$.
- La imagen inversa del plano $y + z = 0$ contiene al vector $(0, 0, 1)^T$.

Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{K}^3$.

Ejercicio 10. Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$ -espacio vectorial de dimensión finita V y $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bases de V .

- Prueba que las matrices asociadas a f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ tienen la misma traza, es decir, $\text{tr}(M_{\mathcal{B}}(f)) = \text{tr}(M_{\mathcal{B}'}(f))$. El valor común de las trazas de las matrices de f respecto a las bases de V se denomina **traza del endomorfismo** f , y se denota $\text{tr}(f)$.
- Si f y g son endomorfismos de V y $a \in \mathbb{K}$, demostrar
 - $\text{tr}(f + g) = \text{tr}(f) + \text{tr}(g)$,
 - $\text{tr}(af) = a \text{tr}(f)$,
 - $\text{tr}(f \circ g) = \text{tr}(g \circ f)$
 - $\text{tr}(\text{id}_V) = \dim_{\mathbb{K}} V$, siendo id_V la aplicación identidad de V .
- Prueba que las matrices asociadas a f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ tienen el mismo determinante, es decir, $\det(M_{\mathcal{B}}(f)) = \det(M_{\mathcal{B}'}(f))$. El valor común de los determinantes de las matrices de f respecto a las bases de V se denomina **determinante del endomorfismo** f , y se denota $\det(f)$.
- Si f es endomorfismo, prueba que f es isomorfismo $\Leftrightarrow f$ es monomorfismo $\Leftrightarrow f$ es epimorfismo $\Leftrightarrow \det(f) \neq 0$. Si f es isomorfismo hallar $\det(f^{-1})$ en función de $\det(f)$.

Ejercicio 11. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ se dice **proyector** (o **proyección**) si es idempotente, i.e., si $f^2 = f$ (donde f^2 significa $f \circ f$). Si $U = \ker f$ y $W = \text{im } f$, se dice que f es la proyección sobre W en la dirección de U .

- Si f es una proyección $\Rightarrow V = \ker f \oplus \text{im } f$.
- f es una proyección y $g = \text{id}_V - f$, entonces g es una proyección.

c) Si f es una proyección, entonces $\ker f = \operatorname{im} g$ e $\operatorname{im} f = \ker g$. Así pues, $g = \operatorname{id}_V - f$ es la proyección sobre U en la dirección de W .

d) Si f y h son proyecciones, determinar condiciones necesarias y suficientes para que $f + h$ sea una proyección. En particular, si f es una proyección, ¿es $f + g$ una proyección?

Ejercicio 12. Sean $f : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ y $g : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$ dos formas lineales definidas por $f((x, y)^T) = x + 2y$ y $g((x, y)^T) = 3x - y$. Halla y expresa en la base dual canónica las formas $f + g$, $4f$ y $2f - 5g$.

Ejercicio 13. Sea $\mathcal{B} = ((1, -1, 3)^T, (0, 1, -1)^T, (0, 3, -2)^T)$ una base de $\mathbb{K}^3$. Hallar su base dual en función de la base dual canónica.

Ejercicio 14. Dadas las formas lineales $f_1((x, y, z)^T) = 2x - y + 3z$, $f_2((x, y, z)^T) = 3x - 5y + z$, $f_3((x, y, z)^T) = 4x + 7y + z$. ¿Forman una base del espacio dual de $\mathbb{K}^3$? En caso afirmativo, hallar las coordenadas en esta base de $f((x, y, z)^T) = x + y + z$.

Ejercicio 15. Expresar en la base dual canónica la forma lineal f tal que $f((4, 2, 0)^T) = 2$, $f((1, 2, -3)^T) = -7$ y $f((0, 2, 5)^T) = -1$.

Ejercicio 16. En $\mathbb{K}^4$ determinar la forma lineal que hace corresponder a los vectores $v_1 = (2, 1, 0, -1)^T$, $v_2 = (3, 2, 1, 0)^T$, $v_3 = (1, 1, -2, 0)^T$ y $v_4 = (2, 3, 2, 1)^T$ los escalares 0, 5, -1 y 6, respectivamente.

Ejercicio 17. En $(\mathbb{K}[x]_2)^*$, consideramos las formas lineales dadas por:

$$D^0(p(x)) = p(0); \quad D^1(p(x)) = p'(0); \quad D^2(p(x)) = p''(0),$$

para cada $p(x)$ de $\mathbb{K}[x]_2$. Se pide:

- Probar que (D^0, D^1, D^2) es base de $(\mathbb{K}[x]_2)^*$.
- Calcular la base de $\mathbb{K}[x]_2$ de la cual es dual.

Ejercicio 18. Sea $V = \mathbb{K}[x]_3$. En el espacio dual V^* se consideran los siguientes subespacios: U generado por E_1 y E_{-1} , definidas por

$$E_1(p(x)) = p(1), \quad E_{-1}(p(x)) = p(-1), \quad \text{para } p(x) \in \mathbb{K}[x]_3,$$

y W generado por D^1, D^2 y D^3 siendo

$$D^1(p(x)) = p'(0), \quad D^2(p(x)) = p''(0), \quad D^3(p(x)) = p'''(0), \quad \text{para } p(x) \in \mathbb{K}[x]_3.$$

Calcular suma e intersección de estos subespacios.

Ejercicio 19. a) Encontrar una base del subespacio vectorial $U : x_1 - x_2 + x_3 = x_2 - x_3 + x_4 = 0$ y prolongarla hasta una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{K}^4$.

b) Obtener una base $\mathcal{B}_2$ del cociente $\mathbb{K}^4/U$ y la matriz, respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ de la proyección canónica $\pi : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4/U$. Calcular las coordenadas respecto de $\mathcal{B}_2$ del vector $(1, 1, 1, 1)^T + U$.

c) Sean las formas lineales

$$f_1((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = x_1 + x_2 + x_3, \quad f_2((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) = 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4.$$

¿Existe una forma lineal $g_1 : \mathbb{K}^4/U \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $f_1 = g_1 \circ \pi$? En caso afirmativo, calcular las coordenadas de g_1 respecto de la base dual de $\mathcal{B}_2$.

¿Existe una forma lineal $g_2 : \mathbb{K}^4/U \rightarrow \mathbb{K}$ tal que $f_2 = g_2 \circ \pi$? En caso afirmativo, calcular las coordenadas de g_2 respecto de la base dual de $\mathcal{B}_2$.