

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja 8

Advertencia: colocaremos las coordenadas de vectores y puntos de $\mathbb{R}^n$ en **columnas**.

- El **producto escalar** de dos vectores u, v se denota $\langle u, v \rangle$ (otras notaciones son $u \cdot v$ ó $\psi(u, v)$);
- el **producto vectorial** de vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ se denota $u \wedge v$ (otra notación es $u \times v$).
- dados espacios vectoriales euclidianos $(V, \langle, \rangle)$ y $(V', \langle, \rangle')$, una **isometría** de V en V' es una aplicación lineal $f : (V, \langle, \rangle) \rightarrow (V', \langle, \rangle')$ tal que $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle f(v_1), f(v_2) \rangle', \forall v_1, v_2$ (otra denominación es **aplicación lineal ortogonal**);
- dado un espacio vectorial euclidiano $(V, \langle, \rangle)$ un endomorfismo f de V se dice **simétrico** si $\langle f(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, f(v_2) \rangle, \forall v_1, v_2$ (otra denominación es **endomorfismo autoadjunto**);
- una **simetría lineal** (o **reflexión lineal**) es una isometría involutiva de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo, es decir una isometría $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $s^2 = \text{id}$;
- una **rotación lineal** (o **giro lineal**) en $\mathbb{R}^2$ está determinada por un centro (que es el origen de coordenadas), un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ y un sentido (positivo o negativo);
- una **rotación lineal axial** (o **giro lineal axial**) en $\mathbb{R}^3$ está determinada por un vector u , un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$; u determina un **eje** de giro y un **sentido** de giro;
- Una **roto-simetría** en $\mathbb{R}^3$ es la composición (conmutativa) de una rotación axial y una simetría, cuando el eje de rotación y el plano de simetría son mutuamente ortogonales.
- V_λ denota $\ker(f - \lambda \text{id})$.

En el futuro veremos simetrías afines y rotaciones afines.

Ejercicio 1.

1. Da un ejemplo en el que $\langle u, v \rangle w \neq u \langle v, w \rangle$.
2. Determina si las siguientes aplicaciones $\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son productos escalares y para aquellos que lo sean, encuentra una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.
 - a) $\langle (x, y)^T, (x', y')^T \rangle = 2xx' + 3xy' + 3x'y + 5yy'$,
 - b) $\langle (x, y)^T, (x', y')^T \rangle = 9xx' + 6xy' + 3x'y + 4yy'$,
 - c) $\langle (x, y)^T, (x', y')^T \rangle = \sqrt{x^2(x')^2} + \sqrt{y^2(y')^2}$,
 - d) $\langle (x, y)^T, (x', y')^T \rangle = 9xx' + 6xy' + 6x'y + 4yy'$,
 - e) $\langle (x, y)^T, (x', y')^T \rangle = xx' + xy' + x'y$,

Ejercicio 2. Las diagonales de un rombo son perpendiculares. Si u y v son vectores de un espacio vectorial euclídeo tales que $\|u\| = \|v\|$, probar que los vectores $u + v$ y $u - v$ son ortogonales. (Un **rombo** es un paralelogramo todos cuyos lados tienen la misma longitud).

Ejercicio 3. Teorema del coseno. Utilizando el producto escalar usual, demostrar que Si a , b y c son los lados de un triángulo y α el ángulo formado por los lados b y c entonces $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$. Busca los enunciados del **teorema del seno** y el **teorema de la tangente**.

Ejercicio 4. Sea V un espacio vectorial euclídeo y sean U, U_1 y U_2 subespacios de V . Demostrar:

1. $\{0\}^\perp = V$ y $\{0\} = V^\perp$,
2. $U_1 \subseteq U_2 \Rightarrow U_1^\perp \supseteq U_2^\perp$,
3. $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$,
4. $U_1^\perp + U_2^\perp \subseteq (U_1 \cap U_2)^\perp$, con igualdad cuando la dimensión de V es finita,
5. Si $f : (V, \langle, \rangle) \rightarrow (V', \langle, \rangle')$ es una isometría, entonces $f(U^\perp) \subseteq f(U)^\perp$, con igualdad cuando la dimensión de V es finita,
6. $U \subseteq U^{\perp\perp}$, con igualdad cuando la dimensión de V es finita.

Ejercicio 5.

1. En $M_n(\mathbb{R})$ se considera el producto escalar $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$. Hallar la matriz (de Gram) de $\langle, \rangle$ respecto de la base estándar de $M_n(\mathbb{R})$ (formada por las matrices B_{ij} . $i, j = 1, 2, \dots, n$, cuyas entradas son todas 0 excepto la entrada (i, j) , que vale 1). Demostrar que $M_n^{\text{sim}}(\mathbb{R})^\perp = M_n^{\text{anti}}(\mathbb{R})$.
2. Hallar la matriz (de Gram) del producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ respecto de la base $\mathcal{B} = ((1, 0, 0)^T, (1, 1, 0)^T, (1, 1, 1)^T)$.
Idem respecto de la base $\mathcal{B}' = ((1, 1, 2)^T, (3, 1, 1)^T, (-2, -1, 2)^T)$.
3. En $\mathbb{R}[x]_2$ se considera el producto escalar definido por $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Hallar la matriz (de Gram) este producto escalar respecto de la base estándar $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$.
Comprobar que $p = x - 1$ y $q = 3x - 1$ son ortogonales.
Hallar $L(p)^\perp$, i.e., todos los polinomios de $\mathbb{R}[x]_2$ que son ortogonales a p .
4. En un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, un producto escalar tiene matriz (de Gram) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ respecto de cierta base $\mathcal{B}$. Si U es el subespacio de ecuaciones $x - y = x + z = 0$ respecto de $\mathcal{B}$, calcula $U^\perp$.

Ejercicio 6. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el subespacio U generado por el vector $(1, 2, 1)^T$. Hallar la proyección ortogonal sobre U , $p_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuando se considera:

1. el producto escalar usual,

2. el producto escalar cuya matriz (de Gram) con respecto a la base canónica es $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7. Con el método de Gram–Schmidt, construir una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, respecto del producto escalar usual, a partir de cada una de las siguientes bases. Idem con el producto escalar cuya matriz (de Gram) respecto de la base canónica es $G = (g_{ij})$ donde $g_{ij} = i\delta_{ij}$ (**delta de Kronecker**).

1. $\mathcal{B}_1 = (v_1 = (1, 0, 0, 0)^T, v_2 = (1, 1, 0, 0)^T, v_3 = (1, 1, 1, 0)^T, v_4 = (1, 1, 1, 1)^T)$.
2. $\mathcal{B}_2 = (v_1 = (2, 1, 0, 0)^T, v_2 = (-1, 0, 1, 0)^T, v_3 = (1, -2, 1, 0)^T, v_4 = (0, 0, 0, 1)^T)$.
3. $\mathcal{B}_3 = (v_1 = (1, -1, -1, -1)^T, v_2 = (1, 1, 0, 0)^T, v_3 = (1, 0, 1, 0)^T, v_4 = (1, 0, 0, 1)^T)$.

Ejercicio 8. Propiedades del producto vectorial. Demostrar que $\forall u, u', v, w \in \mathbb{R}^3$ y $\forall a \in \mathbb{R}$, se verifica

1. $(u + u') \wedge v = u \wedge v + u' \wedge v$, (linealidad en la primera variable).
2. $(au) \wedge v = a(u \wedge v) = u \wedge (av)$, (linealidad en la primera variable).
3. $u \wedge v = -(v \wedge u)$, (antisimetría)
4. Si u, v son linealmente independientes, entonces $\|u \wedge v\|$ es el área del paralelogramo determinado por u e v .
5. $u \wedge (v \wedge w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$.
6. Dar un ejemplo en el que $u \wedge (v \wedge w) \neq (u \wedge v) \wedge w$. El producto vectorial no es asociativo.
7. $\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2$ (**identidad de Lagrange**).
8. $u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0$ (**identidad de Jacobi**).

Ejercicio 9. Producto mixto. Se define el **volumen** de un **paralelepípedo** como el producto del área de su base por su altura. Se demuestra (usando integración elemental) que el volumen de un **tetraedro** es la *sexta parte* del área de su base por su altura.

Dados vectores $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, su *producto mixto* es, por definición, $\langle x, y \wedge z \rangle \in \mathbb{R}$. En coordenadas, tenemos

$$\langle x, y \wedge z \rangle = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Sean $P_{x,y,z}$ el paralelepípedo determinado por x, y, z , $T_{x,y,z}$ el tetraedro determinado por x, y, z y $\text{Pir}_{x,y,x+y,z}$ la pirámide (irregular) determinada por $x, y, x + y, z$. Demostrar

1. $\text{vol } P_{x,y,z} = |\langle x, y \wedge z \rangle|$,
2. $\text{vol } T_{x,y,z} = |\langle x, y \wedge z \rangle| / 6$,
3. $\text{vol Pir}_{x,y,x+y,z} = |\langle x, y \wedge z \rangle| / 3 = \text{vol Pir}_{y,z,y+z,x} = \text{vol Pir}_{z,x,z+x,y}$

Generalización: Dados n vectores en $\mathbb{R}^n$, se define el n -**volumen** del n -**paralelepípedo** determinado por ellos como el valor absoluto del determinante de la matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores, respecto de la base canónica.

Ejercicio 10. Endomorfismo simétrico.

1. Si f es un endomorfismo simétrico de V entonces $(\ker f)^\perp = \text{im } f$.
2. Si $\dim V$ es finita, dada una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V , la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ es simétrica si y solo si f es simétrico.
3. Para una isometría $f : V \rightarrow V$, las siguientes condiciones son equivalentes:
 - a) f es endomorfismo simétrico,
 - b) f es endomorfismo involutivo (i.e., $f^2 = \text{id}$),
 - c) $V = V_1 \oplus V_{-1}$ y $V_1^\perp = V_{-1}$ (i.e., cada vector de V se descompone de modo único en suma de un vector fijo y un vector que se invierte por f).

En tal caso, demuestra que si $\mathcal{B}_1$ es una base ortonormal de V_1 y $\mathcal{B}_{-1}$ es una base ortonormal de V_{-1} entonces $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_{-1}$ es una base ortonormal de V y la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ es diagonal por bloques, con solo dos bloques diagonales: uno es I_{d_1} y otro es $-I_{n-d_1}$, donde $d_1 = \dim V_1$.

4. Determina la matriz, respecto de la base canónica, de un endomorfismo simétrico f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $f(e_2) = 2e_1 + 2e_2$ y $2e_1 - 2e_2 - e_3$ es autovector.

Ejercicio 11.

1. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las simetrías $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en los planos $H_1 : y = 0$, $H_2 : x - y = 0$, $H_3 : x + y + z = 0$. Halla la matriz de la isometría composición $f = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ respecto de la base canónica y describe f verbalmente. ¿Qué puedes decir de las composiciones de $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ en otro orden?
2. Sea $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una simetría sobre una recta vectorial. Encuentra una base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz de s respecto de $\mathcal{B}$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. ¿Cuántas tales bases podemos encontrar en $\mathbb{R}^2$? Idem $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 12. Sea $\alpha \in [0, 2\pi)$. En el plano $\mathbb{R}^2$ denotemos por r_α la **rotación** de centro el origen, ángulo α y sentido positivo.¹ Denotemos por s_α la **simetría** sobre la recta vectorial que, desde el semieje positivo de las x , forma un ángulo de $\alpha/2$.

Usando las matrices $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$, demostrar:

1. $r_\alpha \circ r_\beta = r_\beta \circ r_\alpha = r_{\alpha+\beta}$,
2. $s_\alpha \circ s_\beta = r_{\alpha-\beta}$,
3. $r_\alpha \circ s_\beta = s_{\alpha+\beta}$,
4. $s_\alpha \circ r_\beta = s_{\alpha-\beta}$,

Deducir que $s_\alpha \circ s_\beta = s_\beta \circ s_\alpha$ si y sólo si los ejes de simetría son perpendiculares o coincidentes. Esto es: *dos simetrías en $\mathbb{R}^2$ conmutan si y solo si sus ejes son perpendiculares o coincidentes*.

En los siguientes 4 ejercicios en $\mathbb{R}^3$, fijamos $u = (a, b, c)^T$ vector unitario, la recta $E = L(u)$ y el plano $E^\perp$, de ecuación $ax + by + cz = 0$.

Ejercicio 13. Matriz A de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre una recta. Sean

$$A = uu^T = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

1. Demostrar que la matriz (respecto de la base canónica) de $p_E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, la proyección ortogonal sobre E , es A .
2. Sea $g_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $g_u(x) = u \wedge x$, $x \in \mathbb{R}^3$. Demostrar que g_u es lineal y que la matriz de g_u (respecto de la base canónica) es B .
3. Demostrar que $B^2 = A - I$, $B^3 = -B$ y $AB = 0 = BA$, esto es, $g_u^2 = p_E - \text{id}$, $g_u^3 = -g_u$ y $p_E \circ g_u = 0 = g_u \circ p_E$.

Ejercicio 14. Matriz R de la rotación $r_{u,\alpha}$ en $\mathbb{R}^3$, alrededor del eje generado por u , ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ y sentido positivo. **Fórmula de Rodrigues.**

- 1.
2. Demostrar que $r_{u,\alpha} = \text{id} + (\sin \alpha)g_u + (1 - \cos \alpha)g_u^2$ y que la matriz de $r_{u,\alpha}$ (respecto de la base canónica) es

$$R = I + (\sin \alpha)B + (1 - \cos \alpha)(A - I). \quad (2)$$

3. Demostrar que $RB = BR = (\cos \alpha)B + (\sin \alpha)B^2$ y que

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(\text{tr } R - 1), \quad \sin \alpha = -\frac{1}{2}\text{tr}(RB).^2$$

Si $a \neq 0$ y $R = (r_{ij})$, demostrar que $\sin \alpha = \frac{1}{a}(r_{32} - (1 - \cos \alpha)bc).^3$

¹ $r_{2\pi-\alpha}$ es la rotación de centro el origen, ángulo α y sentido negativo.

²De las trazas de R y RB se obtiene el ángulo de rotación.

³De la traza de R y una entrada de R se obtiene el ángulo de rotación.

4. Demostrar que la matriz de $r_{u,2\pi-\alpha}$ (respecto de la base canónica) es

$$I + (-\sin \alpha)B + (1 - \cos \alpha)(A - I) = R^T = R^{-1}.$$

5. Demostrar que $r_{u,\alpha} = r_{-u,-\alpha} = r_{-u,2\pi-\alpha}$ y que $r_{-u,\alpha} = r_{u,\alpha}^{-1} = r_{u,2\pi-\alpha}$ (El sentido negativo surge al cambiar u por $-u$ ó α por $-\alpha$, pero no ambos).

Ejercicio 15. Matriz S de la simetría $s_{E^\perp}$ en $\mathbb{R}^3$ respecto del plano $E^\perp$. **Relación de Householder.** Con las notaciones de los ejercicios previos, demostrar

1. $s_{E^\perp} = \text{id} - 2p_E$ y la matriz de $s_{E^\perp}$ es $S = I - 2A$ (respecto de la base canónica).
2. $SB = B = BS$ y $S(A - I) = (A - I) = (A - I)S$. Escribe las correspondientes igualdades entre aplicaciones lineales.

Ejercicio 16. Matriz RS de la roto-simetría $s_{E^\perp} \circ r_{u,\alpha} = r_{u,\alpha} \circ s_{E^\perp}$. Con las notaciones de los ejercicios previos, demostrar

1. $SR = RS = S + (\sin \alpha)B + (1 - \cos \alpha)(A - I)$ es la matriz de la roto-simetría dada (respecto de la base canónica).

2.

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(\text{tr } RS + 1), \quad \sin \alpha = -\frac{1}{2}\text{tr}(RSB).^4$$

Si $a \neq 0$ y $RS = (q_{ij})$, demostrar que $\sin \alpha = \frac{1}{a}(q_{32} - (2 - \cos \alpha)bc).^5$

Ejercicio 17. Sea R la matriz de una rotación y consideremos la matriz antisimétrica $B' = R - R^T$. Sea $u \in \mathbb{R}^3$ tal que $u \wedge x = B'x$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. Pruébese que si $B' \neq 0$, (es decir, si R no es simétrica) entonces $L(u)$ es el eje de la rotación R y que $B' = 0$ si y solo si R es la identidad o una rotación de ángulo $\theta = \pi$. ¿Qué relación tiene la matriz B' con la matriz B definida anteriormente? ¿Cuál es el resultado análogo en el caso de una roto-simetría?

Ejercicio 18.

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación dada por

$$f((x, y, z)^T) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z, 2x - y + 2z, 2x + 2y - z)^T.$$

Probar que f es una isometría y describirla geoméricamente. ¿Es $f^2 = \text{id}$?

2. Hallar la matriz (respecto de la base canónica) de la rotación en $\mathbb{R}^3$ de ángulo $\pi/2$ alrededor de la recta $x = y = z$ y sentido positivo. Idem con sentido negativo.

⁴De las trazas de RS y RSB se obtiene el ángulo de rotación.

⁵De la traza de RS y una entrada de RS se obtiene el ángulo de rotación.

3. Calcular la matriz (respecto de la base canónica) de la simetría de $\mathbb{R}^3$ sobre del plano $x = y$.

4. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es $M = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{-\sqrt{2}-2}{4} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}-2}{4} & \frac{\sqrt{2}-2}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

Comprobar que f es una isometría y describirla en términos de rotaciones y simetrías.

Ejercicio 19. Sea el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz es $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{6} & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & -1 & -3 \\ \sqrt{6} & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Compruébese que f es una roto-simetría.
2. Calcúlese el eje y el ángulo de la rotación asociada y el plano de la simetría asociada a f .
3. Calcúlese una matriz de rotación R y una simetría S tales que $M = RS$.