

Prácticas/Ejercicios de Álgebra Lineal.
Curso 25/26. Doble grado
Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos

MARÍA JESÚS DE LA PUENTE MUÑOZ (UCM)

Prácticas V 10/10/2025: Hoja 1

7. Este ejercicio tiene sentido cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Haciendo el cambio de variables $x_1 = \sin \alpha$, $x_2 = \cos \beta$, $x_3 = \tan \gamma$ obtenemos un SLNH 3 EC 3 INCOG que resolvemos, $2 = x_1 = \sin \alpha$, lo cual es imposible ya que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prácticas V 10/10/2025: Hoja 2

3.

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_f(B) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, H_f(F) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 16 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

$$H_f(C) = H_f(A), H_f(D) = H_f(E) = H_f(B).$$

Prácticas V 17/10/2025: Hoja 1

8. Haciendo el cambio de variables $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$, llegamos a un SLNH 3EC 3INC 3PAR cuya matriz de coeficientes ampliada es la siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 1 & 1 & 2a^2 \\ 1 & -1/2 & 1 & 2b^2 \\ 1 & 1 & -1/2 & 2c^2 \end{array} \right)$$

Observemos la simetría de las ecuaciones anteriores. El método de Gauss–Jordan nos proporciona a la matriz ERF siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{4}{9}(-a^2 + 2b^2 + 2c^2) \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{4}{9}(2a^2 - b^2 + 2c^2) \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \end{array} \right)$$

Para cada terna $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que
$$\begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 0, \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 \geq 0, \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{hay } 2^3 = 8 \text{ soluciones, que}$$

son $x = \pm\sqrt{X} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}$, $y = \pm\sqrt{Y} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2}$, $z = \pm\sqrt{Z} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. Observemos la simetría de las soluciones anteriores.

Interpretación geométrica: En el espacio de parámetros $\mathbb{R}^3$, la ecuación $2b^2 + 2c^2 = a^2$ determina una superficie cónica y la desigualdad $2b^2 + 2c^2 \geq a^2$ determina su exterior.

Análogamente, tenemos que considerar otros dos conos. El conjunto de ternas $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

para las cuales el sistema dado tiene solución es el exterior común a dichos 3 conos; ver figura 1.

Prácticas V 24/10/2025: Hoja 1

14. Si $A^2 = A$ y $B = I_n - A$, entonces $B^2 = (I_n - A)^2 = I_n^2 - I_n A - A I_n + A^2 = I_n - 2A + A = I_n - A = B$. Además $AB = A(I_n - A) = A - A^2 = A - A = 0$. Demostrar $BA = 0$ es análogo.

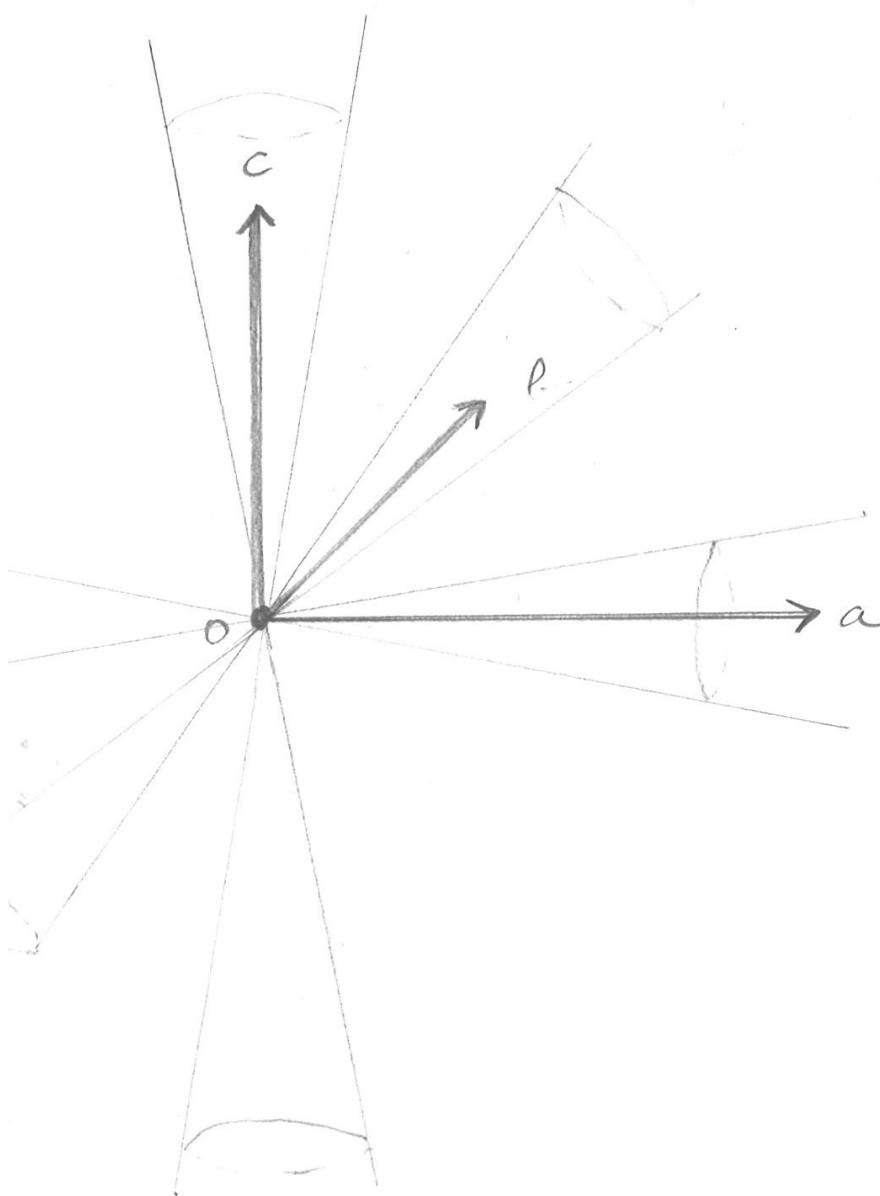
15. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

- a) Si $A = A^T$ y $B = B^T$, entonces $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, usando una propiedad de la trasposición,
- b) Si $A = A^T$ y $k \in \mathbb{K}$, entonces $(kA)^T = kA^T = kA$, usando una propiedad de la trasposición,
- c) CONTRAEJEMPLO: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que no es simétrica,
- d) Si $A = -A^T$ y $B = -B^T$, entonces $-(A + B)^T = -(A^T + B^T) = A + B$, usando una propiedad de la trasposición,
- e) Si $A = -A^T$ y $k \in \mathbb{K}$, entonces $-(kA)^T = -kA^T = kA$, usando una propiedad de la trasposición,
- f) CONTRAEJEMPLO: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$ que no es antisimétrica.
- b. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matriz $A - A^T$ es antisimétrica, pues $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A$. El otro caso es parecido.
- c. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, tenemos

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

donde el primer sumando es simétrico y el segundo es antisimétrico por los apartados anteriores.

Unicidad: Si $A = S + T = S' + T'$, con $S, S' \in M_n^{sim}(\mathbb{K})$ y $T, T' \in M_n^{antisim}(\mathbb{K})$, entonces $S - S' = T - T'$ es una matriz simétrica y antisimétrica. La única matriz que cumple ambas cosas es la matriz nula. Deducimos $S - S' = T - T' = 0$, luego $S = S'$ y $T = T'$.



Extensor común a tres superficies cónicas en $\mathbb{R}^3$
(H1E8).

FIGURA 1