ÁLGEBRA LINEAL
Hoja 2

<u>*Advertencia:*</u> colocaremos las coordenadas de vectores y puntos de $\mathbb{K}^n$ en **columnas**.

Ejercicio 1 1. Identificar las transformaciones elementales por filas asociadas a las siguientes matrices elementales. Idem por columnas: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcular la matriz de Hermite for filas $H_f(A)$ de A y matrices elementales E_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, tales que $H_f(A) = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A$.

3. Expresar la la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ como producto de matrices elementales.

Ejercicio 2 1. Encontrar todas las matrices escalonadas reducidas por filas en $M_{1\times 3}(\mathbb{K})$, $M_{2\times 3}(\mathbb{K})$, $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$, $M_{3\times 1}(\mathbb{K})$ y $M_{3\times 2}(\mathbb{K})$.

2. En los conjuntos de soluciones del apartado anterior encontrar todas las matrices escalonadas reducidas por columnas.

3. Encontrar todas las matrices escalonadas por filas en $M_{3\times 3}(\mathbb{K})$ y decir en cada caso cuál es su matriz escalonada reducida.

Ejercicio 3 1. Decir qué parejas de entre las siguientes matrices son equivalentes por filas (Indicación: halla $H_f(A), H_f(B), \ldots, H_f(F)$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & -4 \\ -1 & 3 & -10 & -4 \\ 2 & -6 & 20 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & -6 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -16 & -8 \\ 1 & -3 & 10 & -2 \\ -1 & 3 & -10 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -4 \\ 1 & 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Encontrar una matriz P_A producto de matrices elementales de forma que $H_f(A) = P_A A$. Idem para las restantes matrices.

3. Encontrar la matriz escalonada reducida por columnas $H_c(.)$ de las anteriores matrices y decir cuáles son equivalentes por columnas.

4. Encontrar una matriz Q_A producto de matrices elementales de forma que $H_c(A) = AQ_A$, donde $H_c(A)$ representa la matriz escalonada reducida por columnas de A. Hacer lo mismo para las restantes matrices.

5. Encontrar la matriz escalonada reducida por filas de las traspuestas de las anteriores matrices.

Ejercicio 4 Para $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{K})$, halla su rango r y su **matriz canónica equivalente** $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r\times(4-r)} \\ 0_{(3-r)\times r} & 0_{(3-r)\times(4-r)} \end{pmatrix} = PAQ$, donde Q y P son productos de matrices elementales. Idem para B y C.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5 Sean $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ y N_1, N_2, N_3 matrices escalonadas reducidas por filas:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indica razonadamente cuál de las tres puede ser la matriz de Hermite por filas de A en los casos siguientes:

1. A es invertible

2. A tiene determinante cero

3. A tiene rango máximo y no es cuadrada

4. A tiene rango 3 y no tiene rango máximo

Ejercicio 6 Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, obtener una matriz Q invertible de tamaño 3, tal que

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \end{pmatrix}$$

¿Cómo usarías este resultado para resolver el sistema de ecuaciones siguiente?

$$\begin{cases} x + 2y + t = 2 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 2z - t = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 7 1. **Teorema de Cayley-Hamilton (en tamaño 2)**. Dada $A \in M_2(\mathbb{K})$, demostrar que se cumple

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0,$$

(i.e., A satisface la ecuación $T^2 - \mathrm{tr}(A)T + \det(A)T^0 = 0$, esto es, A anula su polinomio característico $P_A(T)$.) Ojo: circulan demostraciones erróneas del teorema de Cayley–Hamilton.

2. Si $A \in M_2(K)$ es invertible, entonces $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(\mathrm{tr}(A)I_2 - A)$ (i.e., A^{-1} es una expresión polinomial de grado 1 en A).

3. Razonar cuándo una matriz A de tamaño 2 es igual a su inversa y establecer relación con el Ejercicio 13 de la Hoja 1.

Ejercicio 8 Si A es matriz invertible, demostrar

1. $(rA)^{-1} = A^{-1}/r$, para todo $0 \neq r \in \mathbb{K}$.
2. $(A^p)^{-1} = (A^{-1})^p$, para todo p un número entero y positivo.
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Ejercicio 9 Fórmula de Leibniz. Dada $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, demostrar que

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

donde S_n denota el grupo de permutaciones en n símbolos. (Esto es la generalización de la **regla de Sarrus**.) También se tiene $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$.

Ejercicio 10 Determinante de Vandermonde.

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, demostrar que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

[Indicación: obsérvese que $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2),\ldots,x^{n-1}-y^{n-1}=(x-y)(x^{n-2}+x^{n-3}y+\cdots+xy^{n-3}+y^{n-2})$. Resta la primera columna de las restantes columnas, tomando $x=a_j$, $y=a_1$. Repite.]

2. Probar que $(x-1)^3$ divide al polinomio $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$.

Ejercicio 11 Calcula $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 3 & -4 & -5 & 6 \\ -4 & 5 & 6 & -7 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & -8 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 9 & 2 & -7 & 7 \\ 5 & -6 & 0 & 1 & 8 \\ 8 & 7 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Ejercicio 12 Halla y generaliza a tamaño arbitrario (cuando puedas)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1+a) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (1+b) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (1+c) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+i & 1 & 2 & 0 \\ 2+i & 3 & 4 & 3 \\ 4+i & 2 & 3 & 2 \\ 1-i & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}.$$

Ejercicio 13 *Calcula la expresión general de la entrada (i,j) de la matriz y el determinante de la misma y busca una generalización de los resultados a matrices de tamaño arbitrario.*

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{pmatrix}$

2. ***Matriz compañera:*** $\begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & a_2 & \cdots & (-1)^n a_n \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$,

3. ***Matriz de Bose–Mesner:*** $\begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

4. ***Matriz circulante.*** *Demuestra* $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \end{pmatrix} =$
   $p(1)p(i)p(-1)p(-i)$, *con* $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$.

5. ***Perturbación de rango uno de D:*** *Calcular* $\det(CF+D)$, *donde C es matriz columna, F es matriz fila y $D \in M_n(\mathbb{K})$ es matriz diagonal. [Indicación: recuerda el Ejercicio 20, apartado 1 de la Hoja 1.]*

Ejercicio 14 Probar que $\det \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \cos 2x \\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x \\ \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x \end{pmatrix} = 0$ para todo número real x. Generalizar.

Ejercicio 15 Demuéstrese que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ es antisimétrica entonces $\det A = (-1)^n \det A$ y dedúzcase que las matrices antisimétricas de tamaño impar tienen determinante nulo, cuando $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$. ¿Qué se puede decir del determinante de las matrices antisimétricas de tamaño par?

Ejercicio 16 *Calcula el determinante de $A \in M_n(\mathbb{K})$ en los siguientes casos: ii A es* ***idempotente*** *(i.e., $A^2 = A$), si es* ***nilpotente*** *(i.e., $A^k = 0$ para cierto $k \in \mathbb{N}$) o si es* ***involutiva*** *(i.e., $A^2 = I_n$). Idem si A es* ***ortogonal*** *(i.e., $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $A^T A = I_n = AA^T$.)*

Ejercicio 17 Calcular el rango de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 5 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 3i & 3 \\ 2+i & 1 & 1+2i & 4+i \\ -1+i & 1+i & 1+i & -1+i \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 18 Obtener el rango de las siguientes matrices, en función de los parámetros:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 2 & ab & 1 \\ 2 & b & a \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & a^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & a & b & a+b \\ a & a & 0 & 0 \\ b & 0 & b & 0 \\ a+b & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} a & a & b & b \\ b & a & a & b \\ b & b & a & a \\ a & b & b & a \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 19 Hallar, cuando exista, la inversa de cada una de las matrices dadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 20 1. ¿Para qué valores de a es invertible la matriz $A_a = \begin{pmatrix} -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & a \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$?

2. Hallar A_a^{-1} cuando $a = 1$.

Ejercicio 21 Resolver los siguientes sistemas mediante la regla de Cramer:

a) $\left\{\begin{array}{rcl} 3x+4y &=& 6 \\ -x+7y &=& 0 \end{array}\right.$ b) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 6 \\ x+y-z &=& 0 \\ 2x-y+z &=& 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcl} x_1-x_2+x_3+4x_4 &=& 6 \\ 2x_1+3x_2-x_3-11x_4 &=& -7 \\ x_2+x_3+x_4 &=& 1 \end{array}\right.$ d) $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 3 \\ x-y+z &=& 1 \\ 2x+az &=& b \end{array}\right.$

e) $\left\{\begin{array}{llllcc} 2x & - & y & & = & 2-2\sqrt{2} \\ -x & & & + \sqrt{2}z & = & 1 \\ \sqrt{2}x & + & y & & = & 2\sqrt{2} \end{array}\right.$ f) $\left\{\begin{array}{lllllcr} x & & & + & 2z & & = & 4 \\ -x & + & y & & & & = & -1 \\ x & + & & & & t & = & 1 \end{array}\right.$

Ejercicio 22 Sea P una matriz cuadrada descompuesta en cajas $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, con A y D cuadradas (no necesariamente del mismo tamaño). Si existe A^{-1}, la matriz $D - CA^{-1}B$ se llama **complemento de Schur** de A en P.

1. Comprueba con un ejemplo que, aunque B y C sean cuadradas, en general no es cierto que $\det(P) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$.

2. Demuestra que $P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$ y deduce que
$$\det(P) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

3. Demuestra que $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

4. Demuestra que $\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix}$. [Podemos pensar en $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ como la "matriz elemental por bloques" $E_1(A)$; idem $\begin{pmatrix} I & 0 \\ C & I \end{pmatrix}$ como $E_{21}(C)$.]