Prácticas/Ejercicios de Álgebra Lineal. Curso 25/26. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos

MARÍA JESÚS DE LA PUENTE MUÑOZ (UCM)

Prácticas V 10/10/2025: Hoja 1

7. Este ejercicio tiene sentido cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Haciendo el cambio de variables $x_1 = \operatorname{sen}\alpha$, $x_2 = \cos\beta$, $x_3 = \tan\gamma$ obtenemos un SLNH 3 EC 3 INCOG que resolvemos, $2 = x_1 = \operatorname{sen}\alpha$, lo cual es imposible ya que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prácticas V 10/10/2025: Hoja 2

3.

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ H_f(B) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, H_f(F) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 16 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

$$H_f(C) = H_f(A),\ H_f(D) = H_f(E) = H_f(B).$$

Prácticas V 17/10/2025: Hoja 1

8. Haciendo el cambio de variables $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$, llegamos a un SLNH 3EC 3INC 3PAR cuya matriz de coeficientes ampliada es la siguiente

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1 & | & 2a^2 \\ 1 & -1/2 & 1 & | & 2b^2 \\ 1 & 1 & -1/2 & | & 2c^2 \end{pmatrix}$$

Observemos la simetría de las ecuaciones anteriores. El método de Gauss–Jordan nos proporciona a la matriz ERF siguiente

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & | & \frac{4}{9}(-a^2 + 2b^2 + 2c^2) \\ 0 & \boxed{1} & 0 & | & \frac{4}{9}(2a^2 - b^2 + 2c^2) \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & \frac{4}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \end{pmatrix}$$

Para cada terna $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 0, \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 \geq 0, \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 \geq 0 \end{cases}$ hay $2^3 = 8$ soluciones, que son $x = \pm\sqrt{X} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}$, $y = \pm\sqrt{Y} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2}$, $z = \pm\sqrt{Z} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. Observemos la simetría de las soluciones anteriores.

Interpretación geométrica: En el espacio de parámetros $\mathbb{R}^3$, la ecuación $2b^2 + 2c^2 = a^2$ determina una superficie cónica y la desigualdad $2b^2 + 2c^2 \geq a^2$ determina su exterior. Análogamente, tenemos que considerar otros dos conos. El conjunto de ternas $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ para las cuales el sistema dado tiene solución es el exterior común a dichos 3 conos; ver figura 1.

Prácticas V 24/10/2025: Hoja 1

14. Si $A^2 = A$ y $B = I_n - A$, entonces $B^2 = (I_n - A)^2 = I_n^2 - I_nA - AI_n + A^2 = I_n - 2A + A = I_n - A = B$. Además $AB = A(I_n - A) = A - A^2 = A - A = 0$. Demostrar $BA = 0$ es análogo.

15. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

a. *a*) Si $A = A^T$ y $B = B^T$, entonces $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, usando una propiedad de la trasposición,
   b) Si $A = A^T$ y $k \in \mathbb{K}$, entonces $(kA)^T = kA^T = kA$, usando una propiedad de la trasposición,
   c) CONTRAEJEMPLO: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que no es simétrica,
   d) Si $A = -A^T$ y $B = -B^T$, entonces $-(A + B)^T = -(A^T + B^T) = A + B$, usando una propiedad de la trasposición,
   e) Si $A = -A^T$ y $k \in \mathbb{K}$, entonces $-(kA)^T = -kA^T = kA$, usando una propiedad de la trasposición,
   f) CONTRAEJEMPLO: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$ que no es antisimétrica.

b. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matriz $A - A^T$ es antisimétrica, pues $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A$. El otro caso es parecido.

c. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, tenemos

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

donde el primer sumando es simétrico y el segundo es antisimétrico por los apartados anteriores.

Unicidad: Si $A = S + T = S' + T'$, con $S, S' \in M_n^{sim}(\mathbb{K})$ y $T, T' \in M_n^{antisim}(\mathbb{K})$, entonces $S - S' = T - T'$ es una matriz simétrica y antisimétrica. La única matriz que cumple ambas cosas es la matriz nula. Deducimos $S - S' = T - T' = 0$, luego $S = S'$ y $T = T'$.

Prácticas V 31/10/2025: Hoja 2

5.

a. Si A es invertible (i.e., regular) entonces es cuadrada y, por el teorema de las 5 condiciones equivalentes visto en clase, $H_f(A)$ es la identidad, luego $H_f(A)$ solo pues ser igual a N_2.

b. Si A tiene determinante cero, demostraremos pronto en clase que A no es invertible.[1] Por el teorema de las 5 condiciones equivalentes visto en clase, $H_f(A)$ no es la identidad, luego $H_f(A)$ solo pues ser igual a N_3.
c. Si A tiene rango máximo y no es cuadrada, entonces $H_f(A)$ solo pues ser igual a N_1 ya que A y $H_f(A)$ tienen el mismo tamaño y el mismo rango.
d. Si A tiene rango 3 y no tiene rango máximo, entonces $H_f(A)$ solo pues ser igual a N_3, ya que A y $H_f(A)$ tienen el mismo rango. (OBS: N_1, N_2 tienen rango máximo)

8.

a. $(rA)A^{-1}/r = r(AA^{-1})/r = rI_n/r = I_n(r/r) = I_n$, ya que los escalares conmutan con las matrices.
b. $A^p(A^{-1})^p = (A \overset{p \text{ veces}}{\cdots} A)(A^{-1} \overset{p \text{ veces}}{\cdots} A^{-1}) = (A \overset{p-1 \text{ v.}}{\cdots} A)(AA^{-1})(A^{-1} \overset{p-1 \text{ v.}}{\cdots} A^{-1}) =$
$= (A \overset{p-1 \text{ v.}}{\cdots} A)I_n(A^{-1} \overset{p-1 \text{ v.}}{\cdots} A^{-1}) =$
$= (A \overset{p-2 \text{ v.}}{\cdots} A)(AI_nA^{-1})(A^{-1} \overset{p-2 \text{ v.}}{\cdots} A^{-1}) = \cdots = AA^{-1} = I_n$.
c. $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = I_n$, por dos propiedades de las trasposición.

Prácticas V 21/11/2025: Hoja 3

20.

a.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 - s = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 - s = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 - s = 0 \\ a_1 + b_2 + c_3 - s = 0 \\ c_1 + b_2 + a_3 - s = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 - s = 0 \\ a_2 + b_2 + c_2 - s = 0 \\ a_3 + b_3 + c_3 - s = 0 \end{cases}$$

es SLH de 8 ecuaciones en 10 incógnitas (los a_i, b_i, c_i y s).

b. Sumando las cuatro ecuaciones en que aparece b_2 y simplificando, llegamos a $3b_2 = s$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A, A' \in W$ y la suma de filas, columnas y diagonales de A es s y la suma de filas, columnas y diagonales de A' es s', entonces la suma de filas, columnas y diagonales de $A + A'$ es $s + s'$ y la suma de filas, columnas y diagonales de λA es λs, por lo que $A + A' \in W$ y $\lambda A \in W$. Esto prueba que W es subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{K})$.

Otra forma: el conjunto $\{(A, s) : A \text{ es cuadrado mágico de suma } s\}$ es subespacio de $M_3(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$, ya que es el conjunto de soluciones de un SLH en 10 incógnitas.

[1] Una forma de justificar esto es recordar la fórmula de la inversa $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A^T)$ vista en Bachillerato. Esta fórmula solo se puede escribir cuando $\det(A) \neq 0$.

Pero como $3b_2 = s$, entonces podemos sustituir s por su valor, obteniendo así W como el conjunto de soluciones de un SLH en 9 incógnitas, obteniendo que W es subespacio de $M_3(\mathbb{K})$.

Sean $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Observamos que M_1, M_2, M_3 son cuadrados mágicos.

fg: De $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = b_2$, $\lambda_2 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).

li: De $0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

c. $B = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3$, $s = 15$, $C = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ con $\lambda_1 = \frac{a_1+b_1+c_1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{a_1+b_1-2c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).

Prácticas V 05/12/2025: Hoja 4

18. (1)(a) Del enununciado deducimos que $\dim E = 4$ y que $\dim W = 2$ ya que v_1, v_2 no son proporcionales y generan W.

Vamos a trabajar con coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$.

Los vectores $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$ son li ya que no son proporcionales. Para ver si sus clases $h_1 + W, h_2 + W$ son li planteamos la pregunta: ¿si $0 + W = \lambda_1(h_1 + W) + \lambda_2(h_2 + W)$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, entonces ocurre que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$?

Operando, tenemos $0 + W = \lambda_1(h_1 + W) + \lambda_2(h_2 + W) = (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) + W = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} + W$, lo que equivale a $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \in W$, es decir, que existen $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a-b \\ -b \end{pmatrix}$. Igualando coordenada a cooordenada (respecto de $\mathcal{B}$) obtenemos un SLH 4EC 4INCOG. Se obtiene de inmediato $\lambda_1 = b$, $a = 0$, $2b = 0$. Si $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$ deducimos que $\lambda_1 = \lambda_2 = a = b = 0$ es la solución única. Hemos demostrado que $h_1 + W, H_2 + W$ son li, cuando $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$.

Generalizando lo anterior, tenemos que cualesquiera vectores h_1, h_2 de coordenadas $\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \\ h_{41} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \\ h_{42} \end{pmatrix}$ tales que la matriz $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & -1 & -1 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & -1 \\ h_{31} & h_{32} & -1 & 1 \\ h_{41} & h_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenga rango máximo 4 (tenga determinante no nulo) verifican que h_1, h_2 son li y también los son sus clases módulo W.

Por ello, para encontrar dos vectores h_1, h_2 que sean li, pero que sus clases módulo W sean ld, lo que necesitamos es que la matriz $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & -1 & -1 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & -1 \\ h_{31} & h_{32} & -1 & 1 \\ h_{41} & h_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ NO tenga rango máximo (tenga determinante nulo), siendo el rango de $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \end{pmatrix}$ igual a 2. Por ejemplo, tomo $h_1 = v_1$ y h_2 no proporcional a v_1.

15. La matriz de coeficientes del SLH que describe U es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2. Resolviendo este sistema por M. Gauss–Jordan obtenemos que z, t son variables libres y que $x = -z + 3t$ e $y = t$. Dando, por turnos, el valor 1 a una de las variables libres y 0 al resto, obtenmos una base (u_1, u_2) de U así: $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Tenemos $\dim U = 2$. Buscamos un subespacio W de dimensión 2 tal que $U \cap W = \{0\}$ y $\mathbb{Q}^4 = U + W$. Escribamos $W = L(h_1, h_2)$, con h_1, h_2 vectores li. Debe ocurrir que $\mathbb{Q}^4 = U + W$, para lo cual es necesario y suficiente que u_1, u_2, h_1, h_2 sea una base de $\mathbb{Q}^4$. Para ello, la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3 & h_{11} & h_{12} \\ 0 & 1 & h_{21} & h_{22} \\ 1 & 0 & h_{31} & h_{32} \\ 0 & 1 & h_{41} & h_{42} \end{pmatrix}$ tenga rango máximo 4 (determinante no nulo). Por ejemplo, tomamos $W = L(e_1, e_2) \neq W' = L(e_1, e_4)$.

Prácticas V //2026

EJERCICIO: Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial euclideano de dimensión arbitraria. Demuestra que vectores no nulos y ortogonales dos a dos son linealmente independientes. Dados $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ ortogonales dos a dos y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, supongamos $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$. Entonces, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, mutiplicando por v_j obtenemos $0 = \langle 0, v_j \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n, v_j \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_j \rangle + \cdots + \lambda_{j-1} \langle v_{j-1}, v_j \rangle + \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle + \lambda_{j+1} \langle v_{j+1}, v_j \rangle + \cdots + \lambda_n \langle v_n, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle =$

$\lambda_j \|v_j\|^2$. Tenemos $0 = \lambda_j \|v_j\|^2 \in \mathbb{R}$ y, al ser $\|v_j\|^2 \neq 0$ (ya que $v_j \neq 0$) y ser $\mathbb{R}$ un cuerpo, llegamos a que $0 = \lambda_j$, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$.

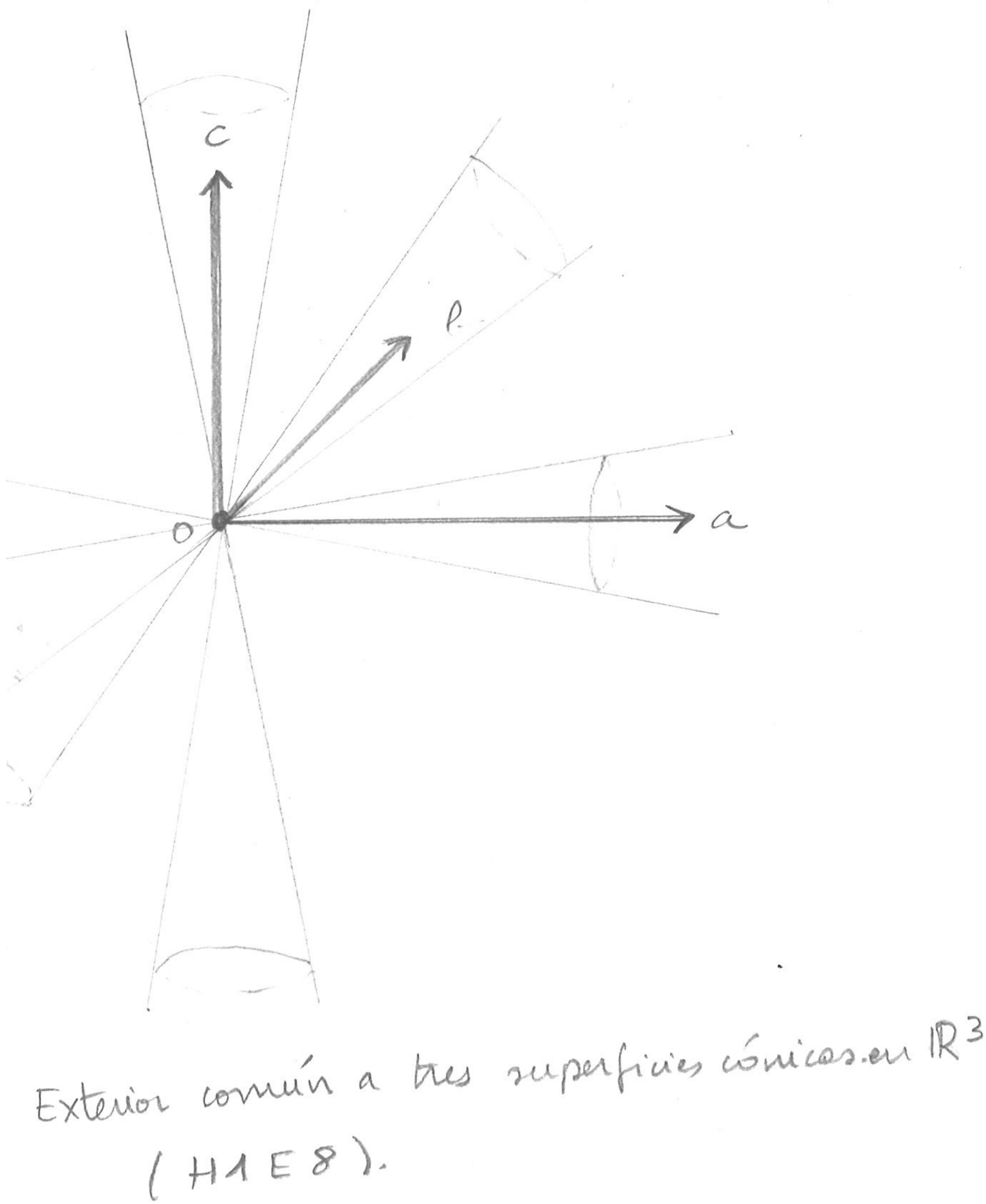
c
b
O
a
Exterior común a tres superficies cónicas en $\mathbb{R}^3$
(H1E8).

Figura 1