

# ÁLGEBRA LINEAL

## Hoja 7

Advertencia: colocaremos las coordenadas de vectores y puntos de  $\mathbb{K}^n$  en **columnas**.

Recuerda que  $\det A = \prod_{\lambda \in \text{sp } A} \lambda$  y  $\text{tr } A = \sum_{\lambda \in \text{sp } A} \lambda$ , donde  $A$  es matriz cuadrada y  $\text{sp } A$  es el **espectro** de  $A$  (familia de los autovalores  $\lambda$  de  $A$ ).

**Ejercicio 1.** Probar que si  $A \in M_2(\mathbb{K})$ , entonces  $P_A(T) = T^2 - \text{tr}(A)T + \det(A)$ .

**Ejercicio 2.** Demostrar que si  $A$  y  $B$  son matrices cuadradas del mismo tamaño entonces  $AB$  y  $BA$  tienen el mismo polinomio característico.<sup>1</sup>

**Ejercicio 3.** Sea  $f$  un endomorfismo de un espacio vectorial de dimensión finita  $V$  sobre  $\mathbb{K}$ . Demostrar:

1.  $f$  es un isomorfismo si y sólo si 0 no es autovalor de  $f$ .
2.  $\lambda$  es autovalor de  $f$  si y sólo si  $-\lambda$  lo es de  $-f$ .
3. Si  $\lambda$  es autovalor de  $f$ , entonces, para cada  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\lambda^k$  lo es de  $f^k$ .
4. Si  $\lambda^2$  es autovalor de  $f^2$ , entonces bien  $\lambda$ , o bien  $-\lambda$  lo es de  $f$  (suponiendo  $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$ ).
5. Si  $f$  es un **proyector** (i.e.,  $f^2 = f$ ), entonces  $f$  no posee autovalores distintos de 0 y 1. Si  $f$  es **involutivo** (i.e.,  $f^2 = \text{id}$ ), entonces  $f$  no posee autovalores distintos de  $\pm 1$ . Si  $f$  es **nilpotente** (i.e., existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $f^k = 0$ ) entonces su único autovalor es el cero.
6.  $f$  y  $f - a \text{id}$  tienen los mismos autovectores, para todo  $a \in \mathbb{K}$ . Describe la relación entre los autovalores de ambos endomorfismos.
7. Si  $v \in V$  es autovector de  $f$ , entonces también lo es de  $f^k$ , para todo  $k \in \mathbb{N}$ , y de  $p(f)$ , para todo polinomio  $p$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ . [Indicación:  $f^0 = \text{id}$ , por convenio.]
8. Si  $f$  es una **isometría**, entonces sus autovalores reales tienen módulo 1.<sup>2</sup>

**Ejercicio 4.** Halla la matriz respecto de la base canónica del endomorfismo de  $\mathbb{K}^4$  tal que  $f((1, 0, 1, 0)^T) = (2, 1, -1, 0)^T$ ,  $L((0, 1, -1, 0)^T)$  sea el subespacio de vectores propios de  $f$  para el valor propio  $-1$  y  $H : x + z = x - y + t = 0$  sea el subespacio de vectores propios de  $f$  para el valor propio  $2$ .

**Ejercicio 5.** Demuestra que toda matriz de rango uno es diagonalizable si y solo si su traza es no nula. [Indicación: cada matriz de rango uno se escribe como producto de columna  $C$  por fila  $F$  (ver Hoja 1, E 20). El determinante de  $CF + D$  se ha calculado en E 13 (5) de la Hoja 2, donde  $D$  es matriz diagonal:  $\det(D + CF) = \det(D) + \sum_{i=1}^n d_1 d_2 \cdots d_{i-1} c_i f_i d_{i+1} d_{i+2} \cdots d_n$  con  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ,  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)^T$ ,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ .]

<sup>1</sup>Se puede demostrar que si  $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$  y  $B \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$  con  $m \geq n$ , entonces el polinomio característico de  $AB$  es el producto de  $(-T)^{m-n}$  por el polinomio característico de  $BA$ .

<sup>2</sup>Se puede demostrar que sus autovalores complejos también tienen módulo 1.

**Ejercicio 6.** Halla el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios de las siguiente matrices. ¿Cuáles pueden diagonalizarse?

$$a) \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad b) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad c) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad d) \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 7.** Halla los valores propios y los vectores propios correspondientes de las matrices  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ , consideradas como matrices sobre  $\mathbb{R}$ , o matrices sobre  $\mathbb{C}$ .

**Ejercicio 8.**

1. Sea  $f$  un endomorfismo de  $\mathbb{C}^2$  no diagonalizable de traza 2. Calcular  $\det f$ .
2. ¿Es diagonalizable una matriz cuadrada de tamaño dos con traza 5 y determinante 4?

**Ejercicio 9.** ¿Para qué valores de  $a$  y  $b$  es diagonalizable la matriz  $A_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 2 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ? Para los valores tales que  $A_{a,b}$  no es diagonalizable, halla la matriz de Jordan  $J_{a,b}$  y una matriz de paso.

**Ejercicio 10.**

1. Sean las expresiones recurrentes 
$$\left. \begin{aligned} u_n &= 3u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ v_n &= 5u_{n-1} + v_{n-1} \end{aligned} \right\} \text{ con } u_0 = v_0 = 1. \text{ Halla } u_n \text{ y } v_n \text{ en función de } n.$$
2. En un criadero de conejos sean  $y_n$  e  $x_n$  el número de machos y hembras al cabo de  $n$  años, respectivamente. Sabiendo que 
$$\left. \begin{aligned} x_{n+1} &= 5x_n - 3y_n \\ y_{n+1} &= 6x_n - 4y_n \end{aligned} \right\} \text{ y que } x_0 = 2, y_0 = 1, \text{ halla el número total de conejos al cabo de 20 años.}$$

**Ejercicio 11.** Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 12 & 10 \end{pmatrix}$ . Encontrar la expresión de la potencia  $n$ -ésima de la matriz  $A$  en función de  $n$ . Hallar  $\exp(A)$ .

**Ejercicio 12.** Sean  $f$  y  $g$  endomorfismos de  $\mathbb{C}^4$  y  $W : x + y - z - t = x + z + t = 0$  subespacio que satisfacen las siguientes 9 hipótesis:

1.  $W$  es invariante por  $f$ ,  $f$  no es diagonalizable,  $f(u) = v$ ,  $f(v) = u$  para  $u = (1, 1, 0, 0)^T$  y  $v = (0, 1, 1, 0)^T$  y  $\text{tr}(f) = 2$ ,

2.  $f \circ g = g \circ f$  y  $f|_W = g|_W$ ,
3.  $\text{tr}(g) = 4$  y  $\det(g) = 1$ .

Calcula las matrices de Jordan de  $f$  y  $g$ .

### Ejercicio 13.

1. Escribe todas las matrices de Jordan en  $M_n(\mathbb{C})$  para  $n = 2, 3, 4$ .
2. Prueba que si  $\lambda$  es autovalor de una matriz nilpotente, entonces  $\lambda = 0$ . [Obs: compara con ejercicio 3, apartado 5.]
3. Halla todas las matrices de Jordan asociadas a las matrices nilpotentes de  $M_5(\mathbb{C})$ .

### Ejercicio 14.

Para  $n \geq 2$  determina la matriz de Jordan de

1. la **matriz circulante** de tamaño  $n$  siguiente  $C_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .
2.  $J_n$ , la matriz todo unos de tamaño  $n$ .

**Ejercicio 15.** Supongamos que respecto de cierta base  $\mathcal{B}$ , la matriz de Jordan de un endomorfismo  $f$  es  $J$ . Explíquese cómo modificar  $\mathcal{B}$  para que la matriz de  $f$  respecto de la nueva base sea  $J^T$ .

### Ejercicio 16.

1. Sea la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}[X]_n \rightarrow \mathbb{R}[X]_n$  definida como  $f(p(X)) = p'(X)$ . Halla una base de  $\mathbb{R}[X]_n$  respecto de la cual la matriz de  $f$  sea de Jordan.
2. Para  $n = 4$  sea la aplicación  $g: \mathbb{R}[X]_n \rightarrow \mathbb{R}[X]_n$  definida como  $g(p(X)) = p(X + 1)$ . Comprueba que  $g$  es lineal. Halla la matriz de Jordan  $J$  de  $g$  y una base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}[X]_n$  tal que  $J$  sea la matriz de  $g$  con respecto  $\mathcal{B}$ .

**Ejercicio 17.** Una matriz  $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  se dice **estocástica** si  $a_{ij} \geq 0$ , para todo  $i, j$  y  $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$  para todo  $j$ . Demuestra que toda matriz estocástica tiene al 1 por autovalor; en particular, posee vectores fijos no nulos.

**Ejercicio 18.** Consideramos la población de cierto país dividida en tres clases: alta, media y baja. Las probabilidades de que una persona cambie de clase o no al cabo de un año dependen solo de la clase a la que ha pertenecido durante el año y son las mismas todos los años. Concretamente

- la probabilidad de seguir siendo de clase alta es  $1/2$ ;
- la probabilidad de pasar a ser de clase media si se era de clase alta es  $1/2$ ;
- la probabilidad de pasar a ser de clase baja si se era de clase alta es  $0$ ;
- la probabilidad de pasar a ser de clase alta si se era de clase media es  $1/4$ ;
- la probabilidad de seguir siendo de clase media es  $1/2$ ;
- la probabilidad de pasar a ser de clase baja si se era de clase media es  $1/4$ ;
- la probabilidad de pasar a ser de clase alta si era de clase baja es  $0$ ;
- la probabilidad de pasar a ser de clase media si se era de clase baja es  $1/2$ ;
- la probabilidad de seguir siendo de clase baja es  $1/2$ .

Este proceso (llamado **cadena de Markov**) se representa así:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ m_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ m_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde el número de habitantes de clase alta en el año  $n$  es  $a_n$ , el de clase media es  $m_n$  y el de clase baja es  $b_n$  y

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

es la **matriz de transición** (que es estocástica).

1. Calcula los autovalores y los autovectores de  $A$ . ¿Es  $A$  diagonalizable?
2. Halla  $A^n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .
3. Supongamos que este año el país tiene 16 millones de habitantes, de los cuales 0,5 millones son de clase alta, 13 millones son de clase media y 2,5 millones son de clase baja. ¿Cuál será el número de habitantes pertenecientes a cada clase al cabo de 20 años?
4. Con los datos iniciales del apartado anterior, cuando pase mucho, mucho tiempo, ¿a qué cantidades tenderá el número de habitantes pertenecientes a cada clase?
5. ¿Existe alguna distribución de la población (expresada como un vector de porcentajes) que no varíe a lo largo del tiempo? Si existe, ¿cuál es?