

Prácticas/Ejercicios de Álgebra Lineal.
Curso 25/26. Doble grado
Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos

MARÍA JESÚS DE LA PUENTE MUÑOZ (UCM)

Prácticas V 10/10/2025: Hoja 1

7. Este ejercicio tiene sentido cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Haciendo el cambio de variables $x_1 = \sin \alpha$, $x_2 = \cos \beta$, $x_3 = \tan \gamma$ obtenemos un SLNH 3 EC 3 INCOG que resolvemos, $2 = x_1 = \sin \alpha$, lo cual es imposible ya que $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prácticas V 10/10/2025: Hoja 2

3.

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H_f(B) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, H_f(F) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 16 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

$$H_f(C) = H_f(A), H_f(D) = H_f(E) = H_f(B).$$

Prácticas V 17/10/2025: Hoja 1

8. Haciendo el cambio de variables $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$, llegamos a un SLNH 3EC 3INC 3PAR cuya matriz de coeficientes ampliada es la siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 1 & 1 & 2a^2 \\ 1 & -1/2 & 1 & 2b^2 \\ 1 & 1 & -1/2 & 2c^2 \end{array} \right)$$

Observemos la simetría de las ecuaciones anteriores. El método de Gauss–Jordan nos proporciona a la matriz ERF siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{4}{9}(-a^2 + 2b^2 + 2c^2) \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{4}{9}(2a^2 - b^2 + 2c^2) \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \end{array} \right)$$

Para cada terna $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que
$$\begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 0, \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 \geq 0, \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{hay } 2^3 = 8 \text{ soluciones, que}$$

son $x = \pm\sqrt{X} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}$, $y = \pm\sqrt{Y} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2}$, $z = \pm\sqrt{Z} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. Observemos la simetría de las soluciones anteriores.

Interpretación geométrica: En el espacio de parámetros $\mathbb{R}^3$, la ecuación $2b^2 + 2c^2 = a^2$ determina una superficie cónica y la desigualdad $2b^2 + 2c^2 \geq a^2$ determina su exterior.

Análogamente, tenemos que considerar otros dos conos. El conjunto de ternas $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

para las cuales el sistema dado tiene solución es el exterior común a dichos 3 conos; ver figura 1.

Prácticas V 24/10/2025: Hoja 1

14. Si $A^2 = A$ y $B = I_n - A$, entonces $B^2 = (I_n - A)^2 = I_n^2 - I_n A - A I_n + A^2 = I_n - 2A + A = I_n - A = B$. Además $AB = A(I_n - A) = A - A^2 = A - A = 0$. Demostrar $BA = 0$ es análogo.

15. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

- a. a) Si $A = A^T$ y $B = B^T$, entonces $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, usando una propiedad de la trasposición,
- b) Si $A = A^T$ y $k \in \mathbb{K}$, entonces $(kA)^T = kA^T = kA$, usando una propiedad de la trasposición,
- c) CONTRAEJEMPLO: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que no es simétrica,
- d) Si $A = -A^T$ y $B = -B^T$, entonces $-(A + B)^T = -(A^T + B^T) = A + B$, usando una propiedad de la trasposición,
- e) Si $A = -A^T$ y $k \in \mathbb{K}$, entonces $-(kA)^T = -kA^T = kA$, usando una propiedad de la trasposición,
- f) CONTRAEJEMPLO: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$ que no es antisimétrica.
- b. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matriz $A - A^T$ es antisimétrica, pues $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A$. El otro caso es parecido.
- c. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, tenemos

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

donde el primer sumando es simétrico y el segundo es antisimétrico por los apartados anteriores.

Unicidad: Si $A = S + T = S' + T'$, con $S, S' \in M_n^{sim}(\mathbb{K})$ y $T, T' \in M_n^{antisim}(\mathbb{K})$, entonces $S - S' = T - T'$ es una matriz simétrica y antisimétrica. La única matriz que cumple ambas cosas es la matriz nula. Deducimos $S - S' = T - T' = 0$, luego $S = S'$ y $T = T'$.

Prácticas V 31/10/2025: Hoja 2

5.

- a. Si A es invertible (i.e., regular) entonces es cuadrada y, por el teorema de las 5 condiciones equivalentes visto en clase, $H_f(A)$ es la identidad, luego $H_f(A)$ solo puede ser igual a N_2 .

- b. Si A tiene determinante cero, demostraremos pronto en clase que A no es invertible.¹ Por el teorema de las 5 condiciones equivalentes visto en clase, $H_f(A)$ no es la identidad, luego $H_f(A)$ solo puede ser igual a N_3 .
- c. Si A tiene rango máximo y no es cuadrada, entonces $H_f(A)$ solo puede ser igual a N_1 ya que A y $H_f(A)$ tienen el mismo tamaño y el mismo rango.
- d. Si A tiene rango 3 y no tiene rango máximo, entonces $H_f(A)$ solo puede ser igual a N_3 , ya que A y $H_f(A)$ tienen el mismo rango. (OBS: N_1, N_2 tienen rango máximo)

8.

- a. $(rA)A^{-1}/r = r(AA^{-1})/r = rI_n/r = I_n(r/r) = I_n$, ya que los escalares conmutan con las matrices.
- b. $A^p(A^{-1})^p = (A \overset{p \text{ veces}}{\cdot} A)(A^{-1} \overset{p \text{ veces}}{\cdot} A^{-1}) = (A \overset{p-1}{\cdot} \cdot A)(AA^{-1})(A^{-1} \overset{p-1}{\cdot} \cdot A^{-1}) = (A \overset{p-1}{\cdot} \cdot A)I_n(A^{-1} \overset{p-1}{\cdot} \cdot A^{-1}) = (A \overset{p-2}{\cdot} \cdot A)(AI_nA^{-1})(A^{-1} \overset{p-2}{\cdot} \cdot A^{-1}) = \dots = AA^{-1} = I_n$.
- c. $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = I_n$, por dos propiedades de las trasposición.

Prácticas V 21/11/2025: Hoja 3

20.

a.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 - s = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 - s = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 - s = 0 \\ a_1 + b_2 + c_3 - s = 0 \\ c_1 + b_2 + a_3 - s = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 - s = 0 \\ a_2 + b_2 + c_2 - s = 0 \\ a_3 + b_3 + c_3 - s = 0 \end{cases}$$

es SLH de 8 ecuaciones en 10 incógnitas (los a_i, b_i, c_i y s).

- b. Sumando las cuatro ecuaciones en que aparece b_2 y simplificando, llegamos a $3b_2 = s$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A, A' \in W$ y la suma de filas, columnas y diagonales de A es s y la suma de filas, columnas y diagonales de A' es s' , entonces la suma de filas, columnas y diagonales de $A + A'$ es $s + s'$ y la suma de filas, columnas y diagonales de λA es λs , por lo que $A + A' \in W$ y $\lambda A \in W$. Esto prueba que W es subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{K})$.

Otra forma: el conjunto $\{(A, s) : A \text{ es cuadrado mágico de suma } s\}$ es subespacio de $M_3(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$, ya que es el conjunto de soluciones de un SLH en 10 incógnitas.

¹Una forma de justificar esto es recordar la fórmula de la inversa $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A^T)$ vista en Bachillerato. Esta fórmula solo se puede escribir cuando $\det(A) \neq 0$.

Pero como $3b_2 = s$, entonces podemos sustituir s por su valor, obteniendo así W como el conjunto de soluciones de un SLH en 9 incógnitas, obteniendo que W es subespacio de $M_3(\mathbb{K})$.

$$\text{Sean } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que M_1, M_2, M_3 son cuadrados mágicos.

fg: De $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = b_2$, $\lambda_2 = \frac{2a_1 - b_1 - c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2a_1 - b_1 - c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).

li: De $0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\text{c. } B = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \text{ con } \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3, s = 15, C = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i \text{ con } \lambda_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \lambda_2 = \frac{2a_1 - b_1 - c_1}{3}, \lambda_3 = \frac{a_1 + b_1 - 2c_1}{3}. \text{ (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).}$$

Prácticas V 05/12/2025: Hoja 4

18. (1)(a) Del enunciado deducimos que $\dim E = 4$ y que $\dim W = 2$ ya que v_1, v_2 no son proporcionales y generan W .

Vamos a trabajar con coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$.

Los vectores $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$ son li ya que no son proporcionales. Para ver

si sus clases $h_1 + W, h_2 + W$ son li planteamos la pregunta: ¿si $0 + W = \lambda_1(h_1 + W) + \lambda_2(h_2 + W)$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, entonces ocurre que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$?

Operando, tenemos $0 + W = \lambda_1(h_1 + W) + \lambda_2(h_2 + W) = (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) + W = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} + W$, lo que equivale a $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} \in W$, es decir, que existen $a, b \in \mathbb{K}$ tales

que $\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ b \\ a - b \\ -b \end{pmatrix}$. Igualando coordenada a coordenada

(respecto de $\mathcal{B}$) obtenemos un SLH 4EC 4INCOG. Se obtiene de inmediato $\lambda_1 = b$, $a = 0$, $2b = 0$. Si $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$ deducimos que $\lambda_1 = \lambda_2 = a = b = 0$ es la solución única. Hemos demostrado que $h_1 + W, h_2 + W$ son li, cuando $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$.

Generalizando lo anterior, tenemos que cualesquiera vectores h_1, h_2 de coordenadas $\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \\ h_{41} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \\ h_{42} \end{pmatrix}$ tales que la matriz $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & -1 & -1 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & -1 \\ h_{31} & h_{32} & -1 & 1 \\ h_{41} & h_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenga rango máximo 4 (tenga determinante no nulo) verifican que h_1, h_2 son li y también los son sus clases módulo W .

Por ello, para encontrar dos vectores h_1, h_2 que sean li, pero que sus clases módulo W sean ld, lo que necesitamos es que la matriz $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & -1 & -1 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & -1 \\ h_{31} & h_{32} & -1 & 1 \\ h_{41} & h_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ NO tenga rango máximo (tenga determinante nulo), siendo el rango de $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \end{pmatrix}$ igual a 2. Por ejemplo, tomo $h_1 = v_1$ y h_2 no proporcional a v_1 .

15. La matriz de coeficientes del SLH que describe U es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2. Resolviendo este sistema por M. Gauss-Jordan obtenemos que z, t son variables libres y que $x = -z + 3t$ e $y = t$. Dando, por turnos, el valor 1 a una de las variables libres y 0 al resto, obtenmos una base (u_1, u_2) de U así: $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tenemos $\dim U = 2$. Buscamos un subespacio W de dimensión 2 tal que $U \cap W = \{0\}$ y $\mathbb{Q}^4 = U + W$. Escribamos $W = L(h_1, h_2)$, con h_1, h_2 vectores li. Debe ocurrir que $\mathbb{Q}^4 = U + W$, para lo cual es necesario y suficiente que u_1, u_2, h_1, h_2 sea una base de $\mathbb{Q}^4$.

Para ello, la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3 & h_{11} & h_{12} \\ 0 & 1 & h_{21} & h_{22} \\ 1 & 0 & h_{31} & h_{32} \\ 0 & 1 & h_{41} & h_{42} \end{pmatrix}$ tenga rango máximo 4 (determinante no nulo).

Por ejemplo, tomamos $W = L(e_1, e_2) \neq W' = L(e_1, e_4)$.

Prácticas V //2026

EJERCICIO: Sea $(V, \langle, \rangle)$ un espacio vectorial euclideo de dimensión arbitraria. Demuestra que vectores no nulos y ortogonales dos a dos son linealmente independientes. Dados $v_1, v_2, \dots, v_n \in V \setminus \{0\}$ ortogonales dos a dos y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, supongamos $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n$. Entonces, para cada $j = 1, 2, \dots, n$, mutiplicando por v_j obtenemos $0 = \langle 0, v_j \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n, v_j \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_j \rangle + \dots + \lambda_{j-1} \langle v_{j-1}, v_j \rangle + \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle + \lambda_{j+1} \langle v_{j+1}, v_j \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_n, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle =$

$\lambda_j \|v_j\|^2$. Tenemos $0 = \lambda_j \|v_j\|^2 \in \mathbb{R}$ y, al ser $\|v_j\|^2 \neq 0$ (ya que $v_j \neq 0$) y ser $\mathbb{R}$ un cuerpo, llegamos a que $0 = \lambda_j$, para cada $j = 1, 2, \dots, n$.

Prácticas V 06/02/2026: Hoja 5

6. (b) La expresión matricial de f (respecto a las bases canónicas, tanto en espacio de salida como de llegada) esn

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

Para obtener unas ec. impl. de $\text{im } f$ aplicamos el M. Gauss–Jordan a la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x'_1 \\ 2 & 1 & 1 & x'_2 \\ -1 & 1 & 2 & x'_3 \end{array} \right)$,

llegando a $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & x'_1 \\ 0 & \boxed{1} & 5/3 & (2x'_1 - x'_2)/3 \\ 0 & 0 & 0 & -x'_1 + x'_2 + x'_3 \end{array} \right)$, de donde concluimos que $0 = -x'_1 + x'_2 + x'_3$

es ecuación implícita de $\text{im } f$. En particular, $\dim \text{im } f = 3 - \text{rg}((-1, 1, 1)) = 3 - 1 = 2$. Así, cualquier par de columnas de la matriz que aparece en la igualdad (1) es un base de $\text{im } f$.

Para calcular $\ker f$, comenzamos hallando una base de $\ker f$, para lo cual continuamos los cálculos realizados (haciendo $x'_1 = x'_2 = x'_3 = 0$) así: $\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -1/3 \\ 0 & \boxed{1} & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$. Llegamos a que x_3 es v. libre, mientras que $x_1 = x_3/3$ y $x_2 = -5x_3/3$

son v. ligadas. Así, el vector $k = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ es una base de $\ker f$ y ec. param. de $\ker f$ son

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -5\alpha \\ x_3 = 3\alpha. \end{cases} \quad \text{Unas ec. impl. de } \ker f \text{ muy sencillas son } x_1 = x_3/3, x_2 = -5x_3/3.$$

13.

- Por hipótesis, existen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ no todos nulos tales que $0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$. Aplicando f a ambos miembros de la igualdad y usando que f es lineal, llegamos a $0 = f(0) = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_n f(u_n)$. Hemos demostrado que los vectores $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ son l.d.
- Si $0 = \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) + \dots + \lambda_n f(u_n)$, con $\lambda_j \in \mathbb{K}$, entonces, usando que f es lineal, llegamos a $0 = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n)$. Sabemos que $f(0) = 0$ y que

f es inyectiva, de donde se saca que $0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$. Sabemos que los vectores $u_1, u_2, \dots, u_n$ son l.i. de donde se saca que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Hemos demostrado que los vectores $f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)$ son l.i.

Prácticas V 13/02/2026: Hoja 5

20.

- a. Basta comprobar que los vectores $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ son li, para lo cual es suficiente ver que $3 = \text{rg } P$ donde $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y como $\det P = -20$, lo que sigue es cierto solo cuando el cuerpo $\mathbb{K}$ tiene característica distinta de 2 y 5.

- b. La matriz A de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es, por definición, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
La matriz A' de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$ es, por definición, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & \nu \end{pmatrix}$, donde

λ, μ, ν satisfacen la siguiente condición (que se traduce en un SLNH 3EC 3INCOG que hay resolver)

$$f(v_4) = v'_1 - v'_3 = \lambda(2v'_1 + v'_2 - v'_3) + \mu(v'_1 - v'_2 - 2v'_3) + \nu(2v'_1 - 2v'_2 + 4v'_3).$$

Obtenemos $\lambda = \mu = 1/3$ y $\nu = 0$.

Tenemos el siguiente *diagrama conmutativo* de aplicaciones lineales y sus respectivas matrices

$$\begin{array}{ccc} V_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{f} & V'_{\mathcal{B}'} \\ & \searrow f & \uparrow \text{id} \\ & & V'_{\mathcal{B}''} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A & & \\ & A' & P \end{array}$$

donde P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$, entonces, la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$ es $P^{-1}A$. Debe ocurrir $A' = P^{-1}A$, esto es, $PA' = A$.

Complemento a H5 E18 hecho hoy en clase. Hemos tomado la base $\mathcal{B} = (k, e_1, e_2)$

de $\mathbb{K}^3$ y la base (w_1, w_2) de W , donde $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hemos considerado $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^3$ dada por $f(k) = 0$, $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$. Hemos visto en clase que la matriz de f resp $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_c$ es $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, la matriz de f

resp. $\mathcal{B}_c$ y $\mathcal{B}_c$ es $C' = CP^{-1}$, en virtud del siguiente *diagrama conmutativo* de aplicaciones lineales y sus respectivas matrices

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{\mathcal{B}}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}_{\mathcal{B}_c}^3 \\ \text{id} \downarrow & \nearrow f & \\ \mathbb{K}_{\mathcal{B}_c}^3 & & \end{array} \quad \begin{array}{cc} C & \\ & P \quad C' \end{array}$$

donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$.

Para pensar: Modifiquemos el ejercicio 13. ¿Verdadero o falso? Si es verdadero, da una demostración y si es falso da un contraejemplo.

Sea una aplicación lineal $f : V \rightarrow V'$.

- Si $u_1, \dots, u_n \in V$ son familia generadora de V , entonces $f(u_1), \dots, f(u_n)$ son familia generadora de V' .
- Si $u_1, \dots, u_n \in V$ son familia generadora de V , entonces $f(u_1), \dots, f(u_n)$ son familia generadora de $\text{im } f$.
- Si f es suprayectiva y $u_1, \dots, u_n \in V$ son familia generadora de V , entonces $f(u_1), \dots, f(u_n)$ son familia generadora de V' .

Prácticas V 27/02/2026: Hoja 7

3. Resuelvo algunos apartados. Los restantes son similares.

- Si λ es autovalor de f , entonces existe $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$. Si $k \in \mathbb{N}$ entonces $f^k(v) = f^{k-1}(f(v)) = f^{k-1}(\lambda v) = \lambda f^{k-1}(v)$. Repitiendo esto k veces, llegamos a $f^k(v) = \lambda^k v$.
- Si λ^2 es autovalor de f^2 , entonces existe $0 \neq v \in V$ tal que $f^2(v) = \lambda^2 v$. Surgen 3 casos:
 - Si $f(v) + \lambda v \neq 0$, calculamos $f(f(v) + \lambda v) = f^2(v) + \lambda f(v) = \lambda^2 v + \lambda f(v) = \lambda(\lambda v + f(v))$, lo que prueba que λ es autovalor de f .
 - Si $f(v) - \lambda v \neq 0$, calculamos $f(f(v) - \lambda v) = f^2(v) - \lambda f(v) = \lambda^2 v - \lambda f(v) = -\lambda(f(v) - \lambda v)$, lo que prueba que $-\lambda$ es autovalor de f .
 - Si $f(v) + \lambda v = 0$ y $f(v) - \lambda v = 0$, restando obtenemos $2\lambda v = 0$ y, al ser $v \neq 0$ y $2 \neq 0$ deducimos $\lambda = 0$ y de ahí $f(v) = 0 = 0v$, lo que prueba que $\lambda = 0$ es autovalor de f .
- Si $f^2 = \text{id}$ y $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, entonces $f^2(v) = \lambda^2 v$ (por el apartado c) y deducimos $\lambda^2 v = \lambda v$, de donde $0 = (\lambda^2 - \lambda)v = \lambda(\lambda - 1)v = 0$ y, al ser $v \neq 0$, deducimos $\lambda = 0$ ó $\lambda - 1 = 0$.

Si $f^2 = \text{id}$ y $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, entonces $v = f^2(v) = \lambda^2 v$ (por el apartado c) y deducimos $0 = (1 - \lambda^2)v = (1 - \lambda)(1 + \lambda)v$, y, al ser $v \neq 0$, deducimos $\lambda + 1 = 0$ ó $\lambda - 1 = 0$.

Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = 0$ y $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, entonces $0 = 0(v) = f^k(v) = \lambda^k v$ (por el apartado c) y, al ser $v \neq 0$, deducimos $\lambda^k = 0$ luego $\lambda = 0$.

- f. Si $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces $(f - a \text{id})(v) = f(v) - av = \lambda v - av = (\lambda - a)v$. Por tanto, $\text{sp}(f - a \text{id}) = \{\lambda - a : \lambda \in \text{sp}(f)\}$.
- g. Si $v \in V$ es autovector de f , entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Por el apartado c tenemos $f^k(v) = \lambda^k v$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Si

$$p(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \text{id}$$

para ciertos $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{K}$, entonces

$$\begin{aligned} p(f)(v) &= (a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \text{id})(v) = a_n f^n(v) + a_{n-1} f^{n-1}(v) + \cdots + a_1 f(v) + a_0 \text{id}(v) = \\ &= a_n \lambda^n v + a_{n-1} \lambda^{n-1} v + \cdots + a_1 \lambda v + a_0 v = (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0)(v) = p(\lambda)v, \\ &\text{con } p(\lambda) \in \mathbb{K}. \text{ Ejemplo: } p(f) = 7f^5 - 3f^2 + 25, p(f)(v) = (7\lambda^5 - 3\lambda^2 + 25)v. \end{aligned}$$

Prácticas V 06/03/2026: Hoja 8

11. (1) Como σ_1 es la simetría respecto del plano $y = 0$, es obvio que $\sigma_1(e_2) = -e_2$, $\sigma_1(e_1) = e_1$, $\sigma_1(e_3) = e_3$, luego la matriz S_1 de σ_1 respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como σ_2 es la simetría respecto del plano $x = y$, es obvio que $\sigma_2(e_1) = e_2$, $\sigma_2(e_2) = e_1$, $\sigma_2(e_3) = e_3$, luego la matriz S_2 de σ_2 respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la matriz S_3 de σ_3 respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ con la *igualdad de Householder*: $S_3 = I - 2A_3$ donde $A_3 = uu^T$ y u es un vector unitario perpendicular al plano H_3 : por ejemplo $u = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, quedando $A_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ y $S_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Observamos que $\det(S_j) = -1 < 0$ y $\text{tr}(S_j) = 1$ para $j = 1, 2, 3$ (tal como dice la clasificación de isometrías de $\mathbb{R}^3$). Deducimos que $\det(S_3 S_2 S_1) = \det(S_3) \det(S_2) \det(S_1) = (-1)^3 = -1 < 0$, luego $f = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ es una isometría de $\mathbb{R}^3$ (por ser composición de isometrías) que invierte la orientación.

Tenemos $S_3 S_2 S_1 = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ luego $\text{tr}(S_3 S_2 S_1) = 1/3$. La clasificación

de isometrías de $\mathbb{R}^3$ nos dice que f es una roto-simetría con traza $1/3 = 2 \cos \alpha - 1$, luego $\cos \alpha = 2/3$ y, $\sin^2 \alpha = 1 - (\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$, $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$. Usando la calculadora, obtenemos $\alpha \simeq \pm 0,8144$ radianes (el signo de α no está determinado aun).

Sabemos que el único vector fijo de f (por ser roto-simetría) es el cero. Sabemos que $f = r_{u,\alpha} \circ s_{E^\perp} = s_{E^\perp} \circ r_{u,\alpha}$, donde u es un vector unitario (que depende de f) y $E = L(u)$.

El vector u se invierte por f (i.e., $f(u) = -u$). Tenemos $u \in V_{-1}(f) = \ker(f + \text{id})$, subespacio dada por las ecuaciones $y = 0$, $x = 2y$ y podemos tomar $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Cálculo del sentido de giro: Tomamos un vector v perpendicular a u cualquiera: por ejemplo $v = e_2$ y calculamos $u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$ (sabemos que $(u, v, u \wedge v)$ es base de

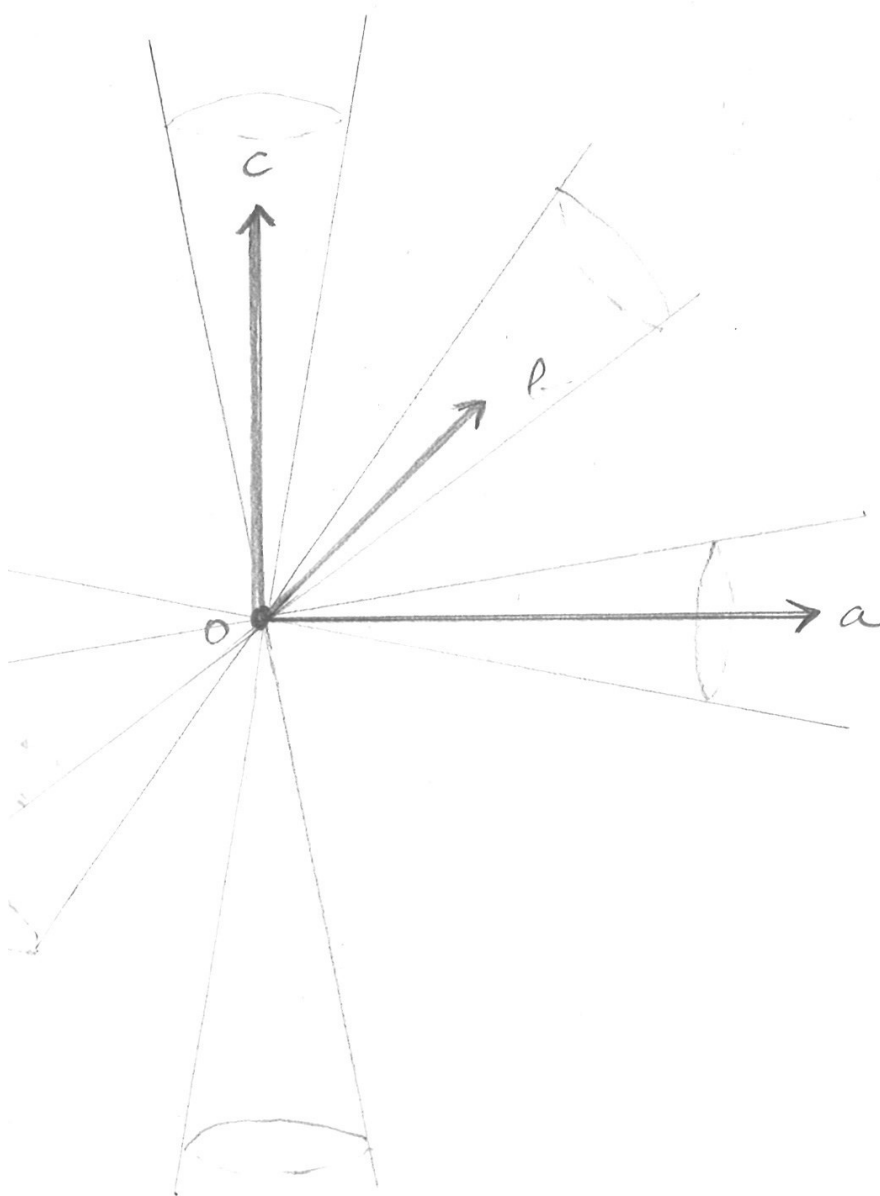
$\mathbb{R}^3$ positivamente orientada). Ahora nos fijamos en los signos de $\widehat{\cos f(v), v} = \langle f(v), v \rangle$ y $\widehat{\cos f(v), u \wedge v} = \langle f(v), u \wedge v \rangle$. Tenemos $\langle f(v), v \rangle = 2/3 > 0$ y $\langle f(v), u \wedge v \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$, lo que significa que tanto $\widehat{f(v), v}$ como $\widehat{f(v), u \wedge v}$ son ángulos agudos, lo que implica que el vector $f(v)$ se encuentra *entre* v y $u \wedge v$. Como ir desde v a $u \wedge v$ se hace en sentido positivo, deducimos que el sentido de giro de f es positivo.

Otra forma: usando el ejercicio H8E16, obtenemos $\sin \alpha = \frac{1}{a}(q_{32} - (2 - \cos \alpha)bc) = \frac{\sqrt{5}}{2}(\frac{2}{3} - 0) = \frac{\sqrt{5}}{3} > 0$ y así $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ y el sentido de giro de f es positivo. *Otra forma:* se puede hallar $\sin \alpha$ a partir de la traza de la matriz $S_3 S_2 S_1 B$ (ver ejercicio H8E16, y se llega al mismo resultado).

De las composiciones de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en otros órdenes (hay $3! - 1 = 6 - 1 = 5$ en total, aparte de f) podemos afirmar lo siguiente:

- todas tienen determinante -1 y traza $1/3$ (ya que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$)
- todas son roto-simetrías $r_{u, \alpha} \circ s_{E^\perp} = s_{E^\perp} \circ r_{u, \alpha}$, con $\alpha \simeq \pm 0,8144$ radianes.
- lo que cambia en cada caso es el vector unitario u .

Ampliación: Observamos que $S_j = S_j^T$ para $j = 1, 2, 3$. ¿Qué significado tiene esto? (buscar algún ejercicio en la hoja 8 que nos ilumine). En cambio $S_3 S_2 S_1 \neq (S_3 S_2 S_1)^T$.



Exterior común a tres superficies cónicas en $\mathbb{R}^3$
(H1E8).

FIGURA 1