Prácticas/Ejercicios de Álgebra Lineal. Curso 25/26. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos

MARÍA JESÚS DE LA PUENTE MUÑOZ (UCM)

Prácticas V 10/10/2025: Hoja 1

7. Este ejercicio tiene sentido cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Haciendo el cambio de variables $x_1 = \operatorname{sen}\alpha$, $x_2 = \cos\beta$, $x_3 = \tan\gamma$ obtenemos un SLNH 3 EC 3 INCOG que resolvemos, $2 = x_1 = \operatorname{sen}\alpha$, lo cual es imposible ya que $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prácticas V 10/10/2025: Hoja 2

3.

$$H_f(A) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ H_f(B) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, H_f(F) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 16 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix},$$

$$H_f(C) = H_f(A),\ H_f(D) = H_f(E) = H_f(B).$$

Prácticas V 17/10/2025: Hoja 1

8. Haciendo el cambio de variables $X = x^2$, $Y = y^2$, $Z = z^2$, llegamos a un SLNH 3EC 3INC 3PAR cuya matriz de coeficientes ampliada es la siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & 1 & 1 & 2a^2 \\ 1 & -1/2 & 1 & 2b^2 \\ 1 & 1 & -1/2 & 2c^2 \end{array}\right)$$

Observemos la simetría de las ecuaciones anteriores. El método de Gauss–Jordan nos proporciona a la matriz ERF siguiente

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{4}{9}(-a^2 + 2b^2 + 2c^2) \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{4}{9}(2a^2 - b^2 + 2c^2) \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{4}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2) \end{array}\right)$$

Para cada terna $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} -a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 0, \\ 2a^2 - b^2 + 2c^2 \geq 0, \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 \geq 0 \end{cases}$ hay $2^3 = 8$ soluciones, que son $x = \pm\sqrt{X} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}$, $y = \pm\sqrt{Y} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2}$, $z = \pm\sqrt{Z} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. Observemos la simetría de las soluciones anteriores.

Interpretación geométrica: En el espacio de parámetros $\mathbb{R}^3$, la ecuación $2b^2 + 2c^2 = a^2$ determina una superficie cónica y la desigualdad $2b^2 + 2c^2 \geq a^2$ determina su exterior. Análogamente, tenemos que considerar otros dos conos. El conjunto de ternas $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ para las cuales el sistema dado tiene solución es el exterior común a dichos 3 conos; ver figura 1.

Prácticas V 24/10/2025: Hoja 1

14. Si $A^2 = A$ y $B = I_n - A$, entonces $B^2 = (I_n - A)^2 = I_n^2 - I_nA - AI_n + A^2 = I_n - 2A + A = I_n - A = B$. Además $AB = A(I_n - A) = A - A^2 = A - A = 0$. Demostrar $BA = 0$ es análogo.

15. Sean $A, B \in M_n(\mathbb{K})$.

a. *a*) Si $A = A^T$ y $B = B^T$, entonces $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, usando una propiedad de la trasposición,
   b) Si $A = A^T$ y $k \in \mathbb{K}$, entonces $(kA)^T = kA^T = kA$, usando una propiedad de la trasposición,
   c) CONTRAEJEMPLO: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que no es simétrica,
   d) Si $A = -A^T$ y $B = -B^T$, entonces $-(A + B)^T = -(A^T + B^T) = A + B$, usando una propiedad de la trasposición,
   e) Si $A = -A^T$ y $k \in \mathbb{K}$, entonces $-(kA)^T = -kA^T = kA$, usando una propiedad de la trasposición,
   f) CONTRAEJEMPLO: $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$ que no es antisimétrica.

b. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, la matriz $A - A^T$ es antisimétrica, pues $(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A$. El otro caso es parecido.

c. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$, tenemos

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

donde el primer sumando es simétrico y el segundo es antisimétrico por los apartados anteriores.

Unicidad: Si $A = S + T = S' + T'$, con $S, S' \in M_n^{sim}(\mathbb{K})$ y $T, T' \in M_n^{antisim}(\mathbb{K})$, entonces $S - S' = T - T'$ es una matriz simétrica y antisimétrica. La única matriz que cumple ambas cosas es la matriz nula. Deducimos $S - S' = T - T' = 0$, luego $S = S'$ y $T = T'$.

Prácticas V 31/10/2025: Hoja 2

5.

a. Si A es invertible (i.e., regular) entonces es cuadrada y, por el teorema de las 5 condiciones equivalentes visto en clase, $H_f(A)$ es la identidad, luego $H_f(A)$ solo pues ser igual a N_2.

b. Si A tiene determinante cero, demostraremos pronto en clase que A no es invertible.[1] Por el teorema de las 5 condiciones equivalentes visto en clase, $H_f(A)$ no es la identidad, luego $H_f(A)$ solo pues ser igual a N_3.
c. Si A tiene rango máximo y no es cuadrada, entonces $H_f(A)$ solo pues ser igual a N_1 ya que A y $H_f(A)$ tienen el mismo tamaño y el mismo rango.
d. Si A tiene rango 3 y no tiene rango máximo, entonces $H_f(A)$ solo pues ser igual a N_3, ya que A y $H_f(A)$ tienen el mismo rango. (OBS: N_1, N_2 tienen rango máximo)

8.

a. $(rA)A^{-1}/r = r(AA^{-1})/r = rI_n/r = I_n(r/r) = I_n$, ya que los escalares conmutan con las matrices.
b. $A^p(A^{-1})^p = (A\overset{p \text{ veces}}{\cdots\cdots}A)(A^{-1}\overset{p \text{ veces}}{\cdots\cdots}A^{-1}) = (A\overset{p-1 \text{ v.}}{\cdots\cdots}A)(AA^{-1})(A^{-1}\overset{p-1 \text{ v.}}{\cdots\cdots}A^{-1}) =$
$= (A\overset{p-1 \text{ v.}}{\cdots\cdots}A)I_n(A^{-1}\overset{p-1 \text{ v.}}{\cdots\cdots}A^{-1}) =$
$= (A\overset{p-2 \text{ v.}}{\cdots\cdots}A)(AI_nA^{-1})(A^{-1}\overset{p-2 \text{ v.}}{\cdots\cdots}A^{-1}) = \cdots = AA^{-1} = I_n.$
c. $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = I_n$, por dos propiedades de las trasposición.

Prácticas V 21/11/2025: Hoja 3

20.

a.

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 - s = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 - s = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 - s = 0 \\ a_1 + b_2 + c_3 - s = 0 \\ c_1 + b_2 + a_3 - s = 0 \\ a_1 + b_1 + c_1 - s = 0 \\ a_2 + b_2 + c_2 - s = 0 \\ a_3 + b_3 + c_3 - s = 0 \end{cases}$$

es SLH de 8 ecuaciones en 10 incógnitas (los a_i, b_i, c_i y s).

b. Sumando las cuatro ecuaciones en que aparece b_2 y simplificando, llegamos a $3b_2 = s$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A, A' \in W$ y la suma de filas, columnas y diagonales de A es s y la suma de filas, columnas y diagonales de A' es s', entonces la suma de filas, columnas y diagonales de $A + A'$ es $s + s'$ y la suma de filas, columnas y diagonales de λA es λs, por lo que $A + A' \in W$ y $\lambda A \in W$. Esto prueba que W es subespacio vectorial de $M_3(\mathbb{K})$.

Otra forma: el conjunto $\{(A, s) : A$ es cuadrado mágico de suma $s\}$ es subespacio de $M_3(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$, ya que es el conjunto de soluciones de un SLH en 10 incógnitas.

[1] Una forma de justificar esto es recordar la fórmula de la inversa $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A^T)$ vista en Bachillerato. Esta fórmula solo se puede escribir cuando $\det(A) \neq 0$.

Pero como $3b_2 = s$, entonces podemos sustituir s por su valor, obteniendo así W como el conjunto de soluciones de un SLH en 9 incógnitas, obteniendo que W es subespacio de $M_3(\mathbb{K})$.

Sean $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Observamos que M_1, M_2, M_3 son cuadrados mágicos.

fg: De $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = b_2$, $\lambda_2 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).

li: De $0 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ deducimos $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

c. $B = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -3$, $s = 15$, $C = \sum_{i=1}^3 \lambda_i M_i$ con $\lambda_1 = \frac{a_1+b_1+c_1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{2a_1-b_1-c_1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{a_1+b_1-2c_1}{3}$. (OBS: solución válida para cuerpos de característica distinta de 3).

Prácticas V 05/12/2025: Hoja 4

18. (1)(a) Del enununciado deducimos que $\dim E = 4$ y que $\dim W = 2$ ya que v_1, v_2 no son proporcionales y generan W.

Vamos a trabajar con coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$.

Los vectores $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$ son li ya que no son proporcionales. Para ver si sus clases $h_1 + W, h_2 + W$ son li planteamos la pregunta: ¿si $0 + W = \lambda_1(h_1 + W) + \lambda_2(h_2 + W)$, con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$, entonces ocurre que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$?

Operando, tenemos $0 + W = \lambda_1(h_1 + W) + \lambda_2(h_2 + W) = (\lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2) + W = \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix} + W$, lo que equivale a $\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix} \in W$, es decir, que existen $a, b \in \mathbb{K}$ tales que $\begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a-b \\ -b \end{pmatrix}$. Igualando coordenada a cooordenada (respecto de $\mathcal{B}$) obtenemos un SLH 4EC 4INCOG. Se obtiene de inmediato $\lambda_1 = b$, $a = 0$, $2b = 0$. Si $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$ deducimos que $\lambda_1 = \lambda_2 = a = b = 0$ es la solución única. Hemos demostrado que $h_1 + W, H_2 + W$ son li, cuando $\operatorname{car} \mathbb{K} \neq 2$.

Generalizando lo anterior, tenemos que cualesquiera vectores h_1, h_2 de coordenadas $\begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{21} \\ h_{31} \\ h_{41} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} h_{12} \\ h_{22} \\ h_{32} \\ h_{42} \end{pmatrix}$ tales que la matriz $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & -1 & -1 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & -1 \\ h_{31} & h_{32} & -1 & 1 \\ h_{41} & h_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tenga rango máximo 4 (tenga determinante no nulo) verifican que h_1, h_2 son li y también los son sus clases módulo W.

Por ello, para encontrar dos vectores h_1, h_2 que sean li, pero que sus clases módulo W sean ld, lo que necesitamos es que la matriz $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & -1 & -1 \\ h_{21} & h_{22} & 0 & -1 \\ h_{31} & h_{32} & -1 & 1 \\ h_{41} & h_{42} & 0 & 1 \end{pmatrix}$ NO tenga rango máximo (tenga determinante nulo), siendo el rango de $\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \\ h_{31} & h_{32} \\ h_{41} & h_{42} \end{pmatrix}$ igual a 2. Por ejemplo, tomo $h_1 = v_1$ y h_2 no proporcional a v_1.

15. La matriz de coeficientes del SLH que describe U es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, que tiene rango 2. Resolviendo este sistema por M. Gauss–Jordan obtenemos que z, t son variables libres y que $x = -z + 3t$ e $y = t$. Dando, por turnos, el valor 1 a una de las variables libres y 0 al resto, obtenmos una base (u_1, u_2) de U así: $u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Tenemos $\dim U = 2$. Buscamos un subespacio W de dimensión 2 tal que $U \cap W = \{0\}$ y $\mathbb{Q}^4 = U + W$. Escribamos $W = L(h_1, h_2)$, con h_1, h_2 vectores li. Debe ocurrir que $\mathbb{Q}^4 = U + W$, para lo cual es necesario y suficiente que u_1, u_2, h_1, h_2 sea una base de $\mathbb{Q}^4$. Para ello, la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 3 & h_{11} & h_{12} \\ 0 & 1 & h_{21} & h_{22} \\ 1 & 0 & h_{31} & h_{32} \\ 0 & 1 & h_{41} & h_{42} \end{pmatrix}$ tenga rango máximo 4 (determinante no nulo).
Por ejemplo, tomamos $W = L(e_1, e_2) \neq W' = L(e_1, e_4)$.

Prácticas V //2026

EJERCICIO: Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial euclideano de dimensión arbitraria. Demuestra que vectores no nulos y ortogonales dos a dos son linealmente independientes. Dados $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V \setminus \{0\}$ ortogonales dos a dos y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, supongamos $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$. Entonces, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, mutiplicando por v_j obtenemos $0 = \langle 0, v_j \rangle = \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n, v_j \rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_j \rangle + \cdots + \lambda_{j-1} \langle v_{j-1}, v_j \rangle + \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle + \lambda_{j+1} \langle v_{j+1}, v_j \rangle + \cdots + \lambda_n \langle v_n, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle =$

$\lambda_j\|v_j\|^2$. Tenemos $0=\lambda_j\|v_j\|^2\in\mathbb{R}$ y, al ser $\|v_j\|^2\neq 0$ (ya que $v_j\neq 0$) y ser $\mathbb{R}$ un cuerpo, llegamos a que $0=\lambda_j$, para cada $j=1,2,\dots,n$.

Prácticas V 06/02/2026: Hoja 5

6. (b) La expresión matricial de f (respecto a las bases canónicas, tanto en espacio de salida como de llegada) esn

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}. \tag{1}$$

Para obtener unas ec. impl. de $\operatorname{im} f$ aplicamos el M. Gauss–Jordan a la matriz $\begin{pmatrix}1&2&3&|&x_1'\\2&1&1&|&x_2'\\-1&1&2&|&x_3'\end{pmatrix}$, llegando a $\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3&|&x_1'\\0&\boxed{1}&5/3&|&(2x_1'-x_2')/3\\0&0&0&|&-x_1'+x_2'+x_3'\end{pmatrix}$, de donde concluimos que $0=-x_1'+x_2'+x_3'$ es ecuación implícita de $\operatorname{im} f$. En particular, $\dim\operatorname{im} f=3-\operatorname{rg}((-1,1,1))=3-1=2$. Así, cualquier par de columnas de la matriz que aparece en la igualdad (1) es un base de $\operatorname{im} f$.

Para calcular $\ker f$, comenzamos hallando una base de $\ker f$, para lo cual continuamos los cálculos realizados (haciendo $x_1'=x_2'=x_3'=0$) así: $\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3\\0&\boxed{1}&5/3\\0&0&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&-1/3\\0&\boxed{1}&5/3\\0&0&0\end{pmatrix}$. Llegamos a que x_3 es v. libre, mientras que $x_1=x_3/3$ y $x_2=-5x_3/3$ son v. ligadas. Así, el vector $k=\begin{pmatrix}1\\-5\\3\end{pmatrix}$ es una base de $\ker f$ y ec. param. de $\ker f$ son $\begin{cases}x_1=\alpha\\x_2=-5\alpha\\x_3=3\alpha.\end{cases}$ Unas ec. impl. de $\ker f$ muy sencillas son $x_1=x_3/3, x_2=-5x_3/3$.

13.

a. Por hipótesis, existen $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ no todos nulos tales que $0=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n$. Aplicando f a ambos miembros de la igualdad y usando que f es lineal, llegamos a $0=f(0)=f(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n)=\lambda_1f(u_1)+\lambda_2f(u_2)+\cdots+\lambda_nf(u_n)$. Hemos demostrado que los vectores $f(u_1),f(u_2),\dots,f(u_n)$ son l.d.

b. Si $0=\lambda_1f(u_1)+\lambda_2f(u_2)+\cdots+\lambda_nf(u_n)$, con $\lambda_j\in\mathbb{K}$, entonces, usando que f es lineal, llegamos a $0=f(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n)$. Sabemos que $f(0)=0$ y que

f es inyectiva, de donde se saca que $0 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$. Sabemos que los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ son l.i. de donde se saca que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Hemos demostrado que los vectores $f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)$ son l.i.

Prácticas V 13/02/2026: Hoja 5

20.

a. Basta comprobar que los vectores $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$ son li, para lo cual es suficiente ver que $3 = \operatorname{rg} P$ donde $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ y como $\det P = -20$, lo que sigue es cierto solo cuando el cuerpo $\mathbb{K}$ tiene característica distinta de 2 y 5.

b. La matriz A de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es, por definición, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

La matriz A' de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$ es, por definición, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 & \nu \end{pmatrix}$, donde λ, μ, ν satisfacen la siguiente condición (que se traduce en un SLNH 3EC 3INCOG que hay resolver)

$$f(v_4) = v_1' - v_3' = \lambda(2v_1' + v_2' - v_3') + \mu(v_1' - v_2' - 2v_3') + \nu(2v_1' - 2v_2' + 4v_3').$$

Obtenemos $\lambda = \mu = 1/3$ y $\nu = 0$.

Tenemos el siguiente *diagrama conmutativo* de aplicaciones lineales y sus respectivas matrices

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & V'_{\mathcal{B}'} & & A \\
& V'_{\mathcal{B}''} \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & A' & P
\end{tikzcd}$$

donde P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}''$ a $\mathcal{B}'$, entonces, la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$ es $P^{-1}A$. Debe ocurrir $A' = P^{-1}A$, esto es, $PA' = A$.

Complemento a H5 E18 hecho hoy en clase. Hemos tomado la base $\mathcal{B} = (k, e_1, e_2)$ de $\mathbb{K}^3$ y la base (w_1, w_2) de W, donde $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Hemos considerado $f : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ dada por $f(k) = 0$, $f(e_1) = w_1$, $f(e_2) = w_2$. Hemos visto en clase que la matriz de f resp $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}_c$ es $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Entonces, la matriz de f

resp. $\mathcal{B}_c$ y $\mathcal{B}_c$ es $C' = CP^{-1}$, en virtud del siguiente *diagrama conmutativo* de aplicaciones lineales y sus respectivas matrices

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^3_{\mathcal{B}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{K}^3_{\mathcal{B}_c} & & C \\
\mathbb{K}^3_{\mathcal{B}_c} \arrow[ur, "f"'] & & P & C'
\end{tikzcd}$$

donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$.

Para pensar: Modifiquemos el ejercicio 13. ¿Verdadero o falso? Si es verdadero, da una demostración y si es falso da un contraejemplo.

Sea una aplicación lineal $f : V \to V'$.

a. Si $u_1, \dots, u_n \in V$ son familia generadora de V, entonces $f(u_1), \dots, f(u_n)$ son familia generadora de V'.
b. Si $u_1, \dots, u_n \in V$ son familia generadora de V, entonces $f(u_1), \dots, f(u_n)$ son familia generadora de $\operatorname{im} f$.
c. Si f es suprayectiva y $u_1, \dots, u_n \in V$ son familia generadora de V, entonces $f(u_1), \dots, f(u_n)$ son familia generadora de V'.

Prácticas V 27/02/2026: Hoja 7

3. Resuelvo algunos apartados. Los restantes son similares.

c. Si λ es autovalor de f, entonces existe $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$. Si $k \in \mathbb{N}$ entonces $f^k(v) = f^{k-1}(f(v)) = f^{k-1}(f(v)) = f^{k-1}(\lambda v) = \lambda f^{k-1}(v)$. Repitiendo esto k veces, llegamos a $f^k(v) = \lambda^k v$.

d. Si λ^2 es autovalor de f^2, entonces existe $0 \neq v \in V$ tal que $f^2(v) = \lambda^2 v$. Surgen 3 casos:
   a) Si $f(v) + \lambda v \neq 0$, calculamos $f(f(v) + \lambda v) = f^2(v) + \lambda f(v) = \lambda^2 v + \lambda f(v) = \lambda(\lambda v + f(v))$, lo que prueba que λ es autovalor de f.
   b) Si $f(v) - \lambda v \neq 0$, calculamos $f(f(v) - \lambda v) = f^2(v) - \lambda f(v) = \lambda^2 v - \lambda f(v) = -\lambda(f(v) - \lambda v)$, lo que prueba que $-\lambda$ es autovalor de f.
   c) Si $f(v) + \lambda v = 0$ y $f(v) - \lambda v = 0$, restando obtenemos $2\lambda v = 0$ y, al ser $v \neq 0$ y $2 \neq 0$ deducimos $\lambda = 0$ y de ahí $f(v) = 0 = 0v$, lo que prueba que $\lambda = 0$ es autovalor de f.

e. Si $f^2 = f$ y $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, entonces $f^2(v) = \lambda^2 v$ (por el apartado c) y deducimos $\lambda^2 v = \lambda v$, de donde $0 = (\lambda^2 - \lambda)v = \lambda(\lambda - 1)v = 0$ y, al ser $v \neq 0$, deducimos $\lambda = 0$ ó $\lambda - 1 = 0$.

   Si $f^2 = \mathrm{id}$ y $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, entonces $v = f^2(v) = \lambda^2 v$ (por el apartado c) y deducimos $0 = (1-\lambda^2)v = (1-\lambda)(1+\lambda)v$, y, al ser $v \neq 0$, deducimos $\lambda + 1 = 0$ ó $\lambda - 1 = 0$.

Si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k = 0$ y $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$, entonces $0 = 0(v) = f^k(v) = \lambda^k v$ (por el apartado c) y, al ser $v \neq 0$, deducimos $\lambda^k = 0$ luego $\lambda = 0$.

f. Si $0 \neq v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces $(f - a\,\mathrm{id})(v) = f(v) - av = \lambda v - av = (\lambda - a)v$. Por tanto, $\mathrm{sp}(f - a\,\mathrm{id}) = \{\lambda - a : \lambda \in \mathrm{sp}(f)\}$.

g. Si $v \in V$ es autovector de f, entonces existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Por el apartado c tenemos $f^k(v) = \lambda^k v$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Si

$$p(f) = a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0\,\mathrm{id}$$

para ciertos $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{K}$, entonces

$$p(f)(v) = (a_n f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0\,\mathrm{id})(v) = a_n f^n(v) + a_{n-1} f^{n-1}(v) + \cdots + a_1 f(v) + a_0\,\mathrm{id}(v) =$$

$$= a_n \lambda^n v + a_{n-1} \lambda^{n-1} v + \cdots + a_1 \lambda v + a_0 v = (a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0)(v) = p(\lambda) v,$$

con $p(\lambda) \in \mathbb{K}$. Ejemplo: $p(f) = 7f^5 - 3f^2 + 25$, $p(f)(v) = (7\lambda^5 - 3\lambda^2 + 25)v$.

Prácticas V 06/03/2026: Hoja 8

11. (1) Como σ_1 es la simetría respecto del plano $y = 0$, es obvio que $\sigma_1(e_2) = -e_2$, $\sigma_1(e_1) = e_1$, $\sigma_1(e_3) = e_3$, luego la matriz S_1 de σ_1 respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Como σ_2 es la simetría respecto del plano $x = y$, es obvio que $\sigma_2(e_1) = e_2$, $\sigma_2(e_2) = e_1$, $\sigma_2(e_3) = e_3$, luego la matriz S_2 de σ_2 respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculamos la matriz S_3 de σ_3 respecto de $\mathcal{B}_c, \mathcal{B}_c$ con la *igualdad de Householder*: $S_3 = I - 2A_3$ donde $A_3 = uu^T$ y u es un vector unitario perpendicular al plano H_3: por ejemplo $u = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$, quedando $A_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ y $S_3 = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Observamos que $\det(S_j) = -1 < 0$ y $\mathrm{tr}(S_j) = 1$ para $j = 1, 2, 3$ (tal como dice la clasificación de isometrías de $\mathbb{R}^3$). Deducimos que $\det(S_3 S_2 S_1) = \det(S_3)\det(S_2)\det(S_1) = (-1)^3 = -1 < 0$, luego $f = \sigma_3 \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$ es una isometría de $\mathbb{R}^3$ (por ser composición de isometrías) que invierte la orientación.

Tenemos $S_3 S_2 S_1 = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ luego $\mathrm{tr}(S_3 S_2 S_1) = 1/3$. La clasificación de isometrías de $\mathbb{R}^3$ nos dice que f es una roto–simetría con traza $1/3 = 2\cos\alpha - 1$, luego $\cos\alpha = 2/3$ y, y $\mathrm{sen}^2\alpha = 1 - (\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$, $sen\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. Usando la calculadora, obtenemos $\alpha \simeq \pm 0,8144$ radianes (el signo de α no está determinado aun).

Sabemos que el único vector fijo de f (por ser roto–simetría) es el cero. Sabemos que $f = r_{u,\alpha} \circ s_{E^\perp} = s_{E^\perp} \circ r_{u,\alpha}$, donde u es un vector unitario (que depende de f) y $E = L(u)$.

El vector u se invierte por f (i.e., $f(u) = -u$). Tenemos $u \in V_{-1}(f) = \ker(f + \mathrm{id})$, subespacio dada por las ecuaciones $y = 0$, $x = 2y$ y podemos tomar $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Cálculo del sentido de giro: Tomamos un vector v perpendicular a u cualquiera: por ejemplo $v = e_2$ y calculamos $u \wedge v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$ (sabemos que $(u, v, u \wedge v)$ es base de $\mathbb{R}^3$ positivamente orientada). Ahora nos fijamos en los signos de $\cos \widehat{f(v), v} = \langle f(v), v\rangle$ y $\cos \widehat{f(v), u \wedge v} = \langle f(v), u \wedge v\rangle$. Tenemos $\langle f(v), v\rangle = 2/3 > 0$ y $\langle f(v), u \wedge v\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$, lo que significa que tanto $\widehat{f(v), v}$ como $\widehat{f(v), u \wedge v}$ son ángulos agudos, lo que implica que el vector $f(v)$ se encuentra *entre* v y $u \wedge v$. Como ir desde v a $u \wedge v$ se hace en sentido positivo, deducimos que el sentido de giro de f es positivo.

Otra forma: usando el ejercicio H8E16, obtenemos $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{a}(q_{32} - (2 - \cos \alpha)\, bc) = \frac{\sqrt{5}}{2}(\frac{2}{3} - 0) = \frac{\sqrt{5}}{3} > 0$ y así $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ y el sentido de giro de f es positivo. *Otra forma:* se puede hallar $\operatorname{sen} \alpha$ a partir de la traza de la matriz $S_3S_2S_1B$ (ver ejercicio H8E16, y se llega al mismo resultado).

De las composiciones de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ en otros órdenes (hay $3! - 1 = 6 - 1 = 5$ en total, aparte de f) podemos afirmar lo siguiente:

- todas tienen determinante -1 y traza $1/3$ (ya que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$)
- todas son roto–simetrías $r_{u,\alpha} \circ s_{E^\perp} = s_{E^\perp} \circ r_{u,\alpha}$, con $\alpha \simeq \pm 0,8144$ radianes.
- lo que cambia en cada caso es el vector unitario u.

Ampliación: Observamos que $S_j = S_j^T$ para $j = 1, 2, 3$. ¿Qué significado tiene esto? (buscar algún ejercicio en la hoja 8 que nos ilumine). En cambio $S_3S_2S_1 \neq (S_3S_2S_1)^T$.

Prácticas V 13/03/2026: Hoja 7

14. (2) Sea $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ el endomorfismo dado por $f(x) = J_n x$. El polinomio característico de J_n se deduce del determinante de la *matriz Bose–Mesner* (H2 E5): $P_{J_n}(T) = (1 - T - 1)^{n-1}((1 - T) + (n - 1)1) = (-T)^{n-1}(-T + n)$, luego $\mathrm{sp}(J_n) = \{0(\text{con mult.}n - 1), n\}$. Tenemos $m.g.(n) = m.a.(n) = 1$. Por otro lado, la multiplicidad geométrica de 0 es, por definición, la dimensión de $\ker(f - 0\,\mathrm{id}) = \ker f$, que vale $\dim \mathbb{K}^n - \dim \mathrm{im}\, f = n - \mathrm{rg}\, J_n = n - 1 = m.a.(0)$. Deducimos que J_n es semejante a la matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & n \end{pmatrix}$. Obsérvese que $n = \mathrm{tr}\, J_n$. (Se puede hacer ahora el ejercicio H7 E5, que es parecido, pero un poco más general.)

17. Por hipóteisis, tenemos $0 = -1 + \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ para todo j, lo que nos lleva afirmar que las filas de la matriz $A - I$ suman la fila idénticamente nula. Por las propiedades de los determinantes, tenemos $0 = \det(A - I) = P_A(1)$, lo que nos dice que 1 es autovalor de A. Todos vector asociado al autovalor 1 queda fijo por A.

Otra forma: reescribiendo la definición de matriz estocástica, obtenemos

$$(1, 1, \ldots, 1)A = (1, 1, \ldots, 1)$$

y poniendo $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ (vector todo unos), tenemos

$$v^T A = v^T$$

y trasponiendo llegamos a

$$A^T v = A^T (v^T)^T = (v^T A)^T = (v^T)^T = v$$

de donde obtenemos que 1 es autovalor de A^T y de A (ya que A y A^T tienen el mismo polinomio característico).

Prácticas V 10/04/2026: Hoja 10

7.

a. r y s se cruzan y son perpendiculares, pues $r \cap s = \emptyset$ (ya que $1 = x_1 = 0$ es absurdo en un cuerpo), $\operatorname{dir} r = L(e_5)$, $\operatorname{dir} s = L(e_3, e_4)$, $\operatorname{dir} r \nsubseteq \operatorname{dir} s$, $\operatorname{dir} r \nsupseteq \operatorname{dir} s$ y $\operatorname{dir} r \subseteq (\operatorname{dir} s)^{\perp} = L(e_1, e_2, e_5)$.

b. $A = (1, 0, 1, 0, 0)^T$, $B = (0, 1, 0, 0, 5)^T$ son puntos en r, s resp. luego

$$r + s = A + \operatorname{dir} r + \operatorname{dir} s + L(\overrightarrow{AB}) = A + \operatorname{dir}(r + s).$$

Tenemos que $\operatorname{dir}(r + s) = L(e_3, e_4, e_5, -e_1 + e_2)$, luego $r + s$ tiene dimensión 4 (i.e., $r + s$ es un hiperplano afín). Unas ecuaciones paramétricas de $r + s$ son $\begin{cases} x_1 = 1 - \delta \\ x_2 = \delta \\ x_3 = 1 + \alpha \\ x_4 = \beta \\ x_5 = \gamma \end{cases}$ y, eliminando los parámetros, (con condición de rango o con M. Gauss–Jordan), llegamos a que una ecuación implícita de $r + s$ es $x_1 + x_2 - 1 = 0$. [OBS: no se cumple una fórmula de Grassmann semejante a la fórmula vectorial, ya que s y r no se intersecan.]

c. PRIMERA FORMA: para $\alpha \in \mathbb{R}$, sean $P_\alpha \in r$ un punto que recorre r y $t_\alpha = \mathcal{A}(P_\alpha, R)$ un recta que recorre el *haz de rectas que pasan por R y cortan a r.*

Buscamos α tal que $\mathcal{A}(P_\alpha, R) \cap s \neq \emptyset$. [2] Con detalle: $P_\alpha = (1,0,1,0,\alpha)^T$, t_α : $\begin{cases} x_1 = & 2+\lambda \\ x_2 = & -1-\lambda \\ x_3 = & -\lambda \\ x_4 = & 0 \\ x_5 = & -\alpha\lambda \end{cases}$ y t_α corta a s cuando $\alpha = 5/2$ y $\lambda = -2$ dando el punto $(0,1,2,0,5)^T \in s$. La recta pedida es $t_{5/2}$.

Las siguientes formas de razonar se basan en la OBS: $R \in r + s$ (ya que R satisface la ecuación $x_1 + x_2 - 1 = 0$), de donde esperamos que las intersecciones planteadas sean no vacías.

SEGUNDA FORMA: calculamos un punto $Z \in (\{R\} + s) \cap r$, y comprobamos que $\mathcal{A}(R, Z) \cap s \neq \emptyset$. La recta pedida es $\mathcal{A}(R, Z)$ (que debe coincidir con $t_{5/2}$).

Con detalle: el subespacio suma $\{R\} + s = R + \operatorname{dir} s + L(\overrightarrow{RB})$ tiene ecuaciones $\begin{cases} x_1 = & 2-2\rho \\ x_2 = & -1+2\rho \\ x_3 = & \lambda \\ x_4 = & \mu \\ x_5 = & 5\rho \end{cases}$ y tiene dimensión 3, $Z = (1,0,1,0,5/2)^T$, $\mathcal{A}(R, Z) =$ $R + L(\overrightarrow{RZ})$: $\begin{cases} x_1 = & 2-\alpha \\ x_2 = & -1+\alpha \\ x_3 = & \alpha \\ x_4 = & 0 \\ x_5 = & 5\alpha/2 \end{cases}$ y $\mathcal{A}(R, Z) \cap s$ es el punto $(0,1,2,0,5)^T$.

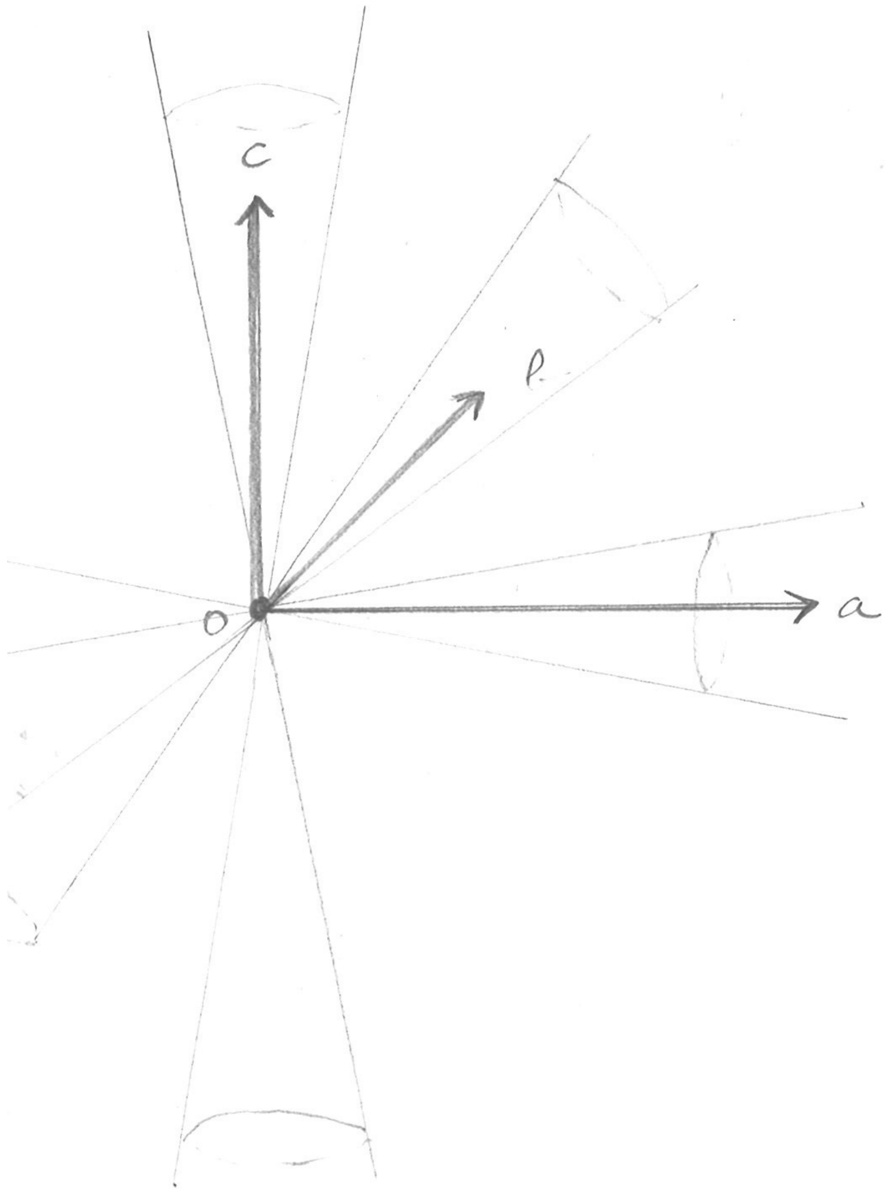
TERCERA FORMA: calculamos $H \in (\{R\}+r) \cap s$, y comprobamos $\mathcal{A}(R, H) \cap r \neq \emptyset$. La recta pedida es $\mathcal{A}(R, H)$ (que debe coincidir con $t_{5/2}$). Los detalles son parecidos.

[2] Si A, B son puntos distintos, $\mathcal{A}(A, B)$ denota la recta que pasa por A y B. También se puede escribir así: $\{A\} + \{B\} = \{\lambda A + (1-\lambda)B : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Pero es un error escribirla así $A + B$. En particular, si $A = B$, tenemos $\mathcal{A}(A, A) = \{A\}$.

CUARTA FORMA: la recta buscada es $(\{R\}+r)\cap(\{R\}+s)$. Tenemos $\{R\}+r$: $\begin{cases} x_1 = & 2+\alpha \\ x_2 = & -1-\alpha \\ x_3 = & -\alpha \\ x_4 = & 0 \\ x_5 = & \beta \end{cases}$ y la intersección cumple $\begin{cases} -2\rho = \alpha \\ 2\rho = -\alpha \\ \lambda = -\alpha \\ \mu = 0 \\ 5\rho = \beta \end{cases}$ de donde $\beta = \frac{-5}{2}\alpha$, luego

$$(\{R\}+r)\cap(\{R\}+s) : \begin{cases} x_1 = & 2+\alpha \\ x_2 = & -1-\alpha \\ x_3 = & -\alpha \\ x_4 = & 0 \\ x_5 = & \frac{-5}{2}\alpha \end{cases} \quad \text{debe ser la recta } t_{5/2}.$$

d. $d(r,s) = \|p_{W^\perp}(\overrightarrow{AB})\| = \sqrt{2}$. En efecto: $L = s + \operatorname{dir} r$: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \nu \\ x_5 = 5+\lambda \end{cases}$ y su dirección es $W = L(e_3, e_4, e_5)$, y tenemos $p_L(B) = A + p_W(\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, luego $p_{W^\perp}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} - p_W(\overrightarrow{AB}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene norma $\sqrt{2} = d(r,s)$.



Exterior común a tres superficies cónicas en $\mathbb{R}^3$
(H1E8).

FIGURA 1