Apellidos y Nombre:

DNI:

Número de hojas:

Álgebra Lineal. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos. 08/01/2025. Primer Parcial

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) ni libros o apuntes. (6) El examen está valorado en 10 puntos.

$\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

1. (TEORÍA) (2 puntos) Demuestra que $\operatorname{rg}(AB) \leq \min\{\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\}$, para todas matrices $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$.

2. ¿Verdadero o falso? Si es verdadero, da una demostración y si es falso, encuentra un contraejemplo. Da las definiciones de las matrices indicadas.

a. (1 punto) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $H_f(A) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = AE_{21}(-1)E_2(-1)E_{12}(-2)$.

b. (1 punto) $\operatorname{tr}(E) = \operatorname{tr}(E^{-1})$, para toda matriz elemental E.

3. (2 puntos) Dados $a \neq b \in \mathbb{K}$, demuestra que $W_{a,b} = \{f(t) \in \mathbb{K}[t]_3 : f(a) = f(b)\}$ es un hiperplano vectorial de $\mathbb{K}[t]_3$.

4. (2 puntos) Supongamos $\operatorname{car}\mathbb{K} \neq 2$. En $\mathbb{K}^4$ se consideran los subespacios vectoriales $U = L(u_1, u_2, u_3)$ y W de ecuaciones $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$, $x_2 = 0$, donde $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcula las dimensiones de U y W y dimensiones y ecuaciones implícitas de $U \cap W$ y $U + W$.

5. (2 puntos) Dado $\Delta_4(a,b) = \det \begin{pmatrix} 0 & a & a & a \\ b & 0 & a & a \\ b & b & 0 & a \\ b & b & b & 0 \end{pmatrix}$, usando la *fórmula de Leibniz*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n},$$

responde razonadamente

a. ¿es $\Delta_4(a,b)$ homogéneo en a, b? En caso afirmativo ¿de qué grado?

b. ¿es $\Delta_4(a,b) = \Delta_4(b,a)$?

c. ¿es ab factor de $\Delta_4(a,b)$?

Demuestra $\Delta_4(a,b) = -ab(a^2 + ab + b^2)$. Generaliza, si es posible, a n arbitrario.