Apellidos y Nombre:

DNI:

Número de hojas:

Álgebra Lineal. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos. 14/05/2025.
Segundo Parcial

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) ni libros o apuntes. (6) El examen está valorado en 10 puntos.

$\mathbb{K}$ denota un cuerpo.

HAY TEXTO POR LAS DOS CARAS.

1. (TEORÍA) (2 puntos) Sean V y V' espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$ de dimensiones n y m respectivamente. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal y consideremos bases $\mathcal{B}$ de V y $\mathcal{B}'$ de V'. Sea A la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Demuestra que $\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{im}(f)$.

2. ¿Verdadero o falso? Si es verdadero, da una demostración y si es falso, encuentra un contraejemplo.

a. (1 punto) V y V^* son isomorfos, donde V es un espacio vectorial de dimensión finita.

b. (1 punto) La matriz $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ es nilpotente.

3. (1 punto) En $M_{2\times 3}(\mathbb{K})$ se considera el subespacio vectorial $U : \begin{cases} x_{11} = 0 \\ x_{22} = 0 \\ x_{13} = 0. \end{cases}$ Demuestra que la siguiente aplicación es un isomorfismo: $f : M_{2\times 3}(\mathbb{K})/U \to U$ dada por $f([B_{11}]) = B_{21}$, $f([B_{22}]) = B_{12}$ $f([B_{13}]) = B_{23}$, siendo $B_{ij} \in M_{2\times 3}(\mathbb{K})$ la matriz que tiene 1 en la posición (i,j) y 0 en el resto.

4. En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio vectorial U de ecuaciones $x_1 + x_4 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$. Halla:

a. (0.25 puntos) una base ortogonal de U,

b. (0.75 puntos) todos los vectores w unitarios que forman ángulo de 60° con e_1 y de 90° con e_3 así como $p_U(w)$ (i.e., la proyección ortogonal de w sobre U).

5. (1 punto) Sean V un espacio vectorial de dimensión 4 sobre $\mathbb{C}$ y $f : V \to V$ un endomorfismo no diagonalizable tal que $\dim \ker(f - 2\,\mathrm{id}) = 2$ y $\dim \ker(f + \mathrm{id}) = 1$. Halla todas las posibles matrices de Jordan de f.

6. (2 puntos) Demuestra que la aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto de los sistemas de referencia canónicos es $\begin{pmatrix} 1 & | & 0 & 0 \\ - & & - & - \\ 0 & | & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1 & | & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ es una rotación, hallando su centro F y su ángulo. Además

¿es verdadero o falso? $f \circ h_{F,r} = h_{F,r} \circ f$, donde $h_{F,r}$ denota la homotecia de centro F y razón $r \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$. Razona la respuesta.

7. (1 punto) Dada la cónica afín euclideana real $\mathcal{C}$ de ecuación $x^2 + \alpha y^2 - 2\beta x + \gamma = 0$, encuentra una condición necesaria y suficiente (en términos de α, β, γ) para que $\mathcal{C}$ sea una elipse cuyo semieje mayor esté sobre el eje x. (1 punto extra) Halla la excentricidad de $\mathcal{C}$.