

Apellidos y Nombre:

DNI y firma:

Número de hojas:

**Álgebra Lineal. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos. 24/06/2025.
Convocatoria Extraordinaria**

Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) ni libros o apuntes. (6) El examen está valorado en 10 puntos.

\mathbb{K} denota un cuerpo. **HAY TEXTO POR LAS DOS CARAS.**

1. (TEORÍA) Dada la matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$, define
 - a. (0,5 puntos) que A sea diagonalizable por semejanza sobre \mathbb{K} ,
 - b. (0,5 puntos) si A es simétrica, que A sea diagonalizable por congruencia sobre \mathbb{K} , (¿por qué es necesaria la hipótesis de simetría?)
 - c. (0,5 puntos) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y A es simétrica, que A sea diagonalizable sobre \mathbb{R} con matriz de paso ortogonal, (¿por qué es necesaria la hipótesis $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?)
 - d. (0,5 puntos) pon un ejemplo con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de una matriz de tamaño 4 que no sea diagonalizable por semejanza. Razona.
2. ¿VERDADERO O FALSO? Si es verdadero, da una demostración y si es falso, explica por qué.
 - a. (1 punto) Sean \mathcal{A} un espacio afín sobre \mathbb{K} y V el espacio vectorial dirección de \mathcal{A} , $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ una aplicación afín y $\vec{f} : V \rightarrow V$ la aplicación lineal asociada. Sean $L \subseteq \mathcal{A}$ un subespacio afín de \mathcal{A} y W la dirección de L . Si $\vec{f}(W) \subseteq W$ y existe un punto $A \in \mathcal{A}$ tal que $f(A) \in W$, entonces $f(L) \subseteq L$.
 - b. (1 punto) Si \mathcal{C} es la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

entonces la hipérbola cuyos focos son los vértices de \mathcal{C} y cuyos vértices son los focos de \mathcal{C} tiene ecuación

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

3. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^4 \rightarrow \mathbb{K}^4$ dada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a. (0,75 puntos) Comprueba que $f^2 = 0$ y deduce que $P_A(T) = T^4$.
 - b. (1 punto) Halla bases de $\text{im } f$ y $\mathbb{K}^4 / \ker f$.
 - c. (1,25 punto) Halla la matriz de Jordan de A y una matriz de paso.

4. En el espacio vectorial $V = \mathbb{R}[t]_2$ se considera la base usual $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$.

- a. (1 punto) Demuestra que la matriz $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ da lugar a un producto escalar en V y calcula la norma de $1 + 2t + 3t^2$.

b. (0,5 puntos) Escribe infinitas formas lineales distintas dos a dos en V .

5. (1,5 puntos) En \mathbb{R}^4 se consideran el plano π de ecuaciones $2x_1 + 3x_2 + x_4 = 3$, $x_1 + 2x_2 = 0$ y la recta r que pasa por el punto de coordenadas $(3, 2, 1, 0)^T$ en la dirección del vector e_1 . Halla unas ecuaciones de la única recta s que es ortogonal a π y a r y corta a ambos.

6. (1 punto extra) Representa gráficamente con precisión las cónicas del ejercicio 2.