

Apellidos y Nombre:

DNI y firma:

Opción:

Número de hojas:

**Álgebra Lineal. Doble grado Economía–Matemáticas y Ciencia de Datos. Examen final
27/05/2025**

*Duración: 3 horas. Instrucciones: (1) Entrega las respuestas en orden: primero la pregunta 1, después la pregunta 2, etc. (2) Empieza una hoja de papel con cada pregunta. (3) Cuando uses enunciados o definiciones tratados en clase, explícalo concisamente. (4) Se valorará la precisión, la claridad y completitud de los argumentos y el buen uso de la lengua. (5) No está permitido el uso de ningún aparato electrónico personal (móvil, calculadora, etc.) ni libros, apuntes, etc. (6) El examen está valorado en 10 puntos. Los alumnos que tiene pendiente el curso completo deben escoger: **opción A**: teoría del primer parcial y verdadero o falso del segundo u **opción B**: teoría del segundo parcial y verdadero o falso del primero. Además de lo anterior, deben hacer de cada parcial, sendas preguntas por valor de 3 puntos. Los puntos extra se pueden conseguir tras haber contestado lo anterior. \mathbb{K} denota un cuerpo. **HAY TEXTO POR LAS DOS CARAS.***

PRIMER PARCIAL

1. (TEORÍA) (2 puntos) Demuestra que $AA^{*T} = \det(A)I_n$, donde $A \in M_n(\mathbb{K})$, A^* es la matriz adjunta de A , dada por $A^* = (\alpha_{ij})$, con $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$, siendo A_{ij} la submatriz que se obtiene a partir de A eliminando la fila i -sima y la columna j -sima, A^T es la matriz transpuesta de A y se sabe que $A^{*T} = A^{T*}$.

2. ¿VERDADERO O FALSO? Si es verdadero, da una demostración y si es falso, encuentra un contraejemplo.

- (1 punto) Dados $0 \leq k \leq n \in \mathbb{N}$, el conjunto de las matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ de rango menor o igual que k es un subespacio vectorial de $M_n(\mathbb{K})$.
- (1 punto) Dado $n \in \mathbb{N}$, si $\text{car } \mathbb{K} \neq 2$, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, A es simétrica y B es antisimétrica, entonces $\text{tr}(AB) = 0$.

3. (2 puntos) Expresa $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y T^{-1} como producto de matrices elementales.

4. (2 puntos) Sabiendo que $a_1 \neq 0$, demuestra la siguiente igualdad

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1^3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & |a_1 & b_1| & |a_1 & c_1| & |a_1 & d_1| \\ 0 & |a_2 & b_2| & |a_2 & c_2| & |a_2 & d_2| \\ 0 & |a_1 & b_1| & |a_1 & c_1| & |a_1 & d_1| \\ 0 & |a_3 & b_3| & |a_3 & c_3| & |a_3 & d_3| \\ 0 & |a_1 & b_1| & |a_1 & c_1| & |a_1 & d_1| \\ 0 & |a_4 & b_4| & |a_4 & c_4| & |a_4 & d_4| \end{vmatrix}$$

(1 punto extra) si generalizas esta igualdad entre determinantes de tamaño $n = 4$ a n arbitrario (si es posible))

5. (2 puntos) Sea $n \geq 3$. En $V = \mathbb{K}[x]_n$, se consideran los subespacios

$$V_1 = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k : a_1 = 0; a_2 + a_3 + \dots + a_n = 0 \right\}, \quad V_2 = \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k : a_0 = a_1 = \dots = a_{n-2} = 0 \right\}.$$

Calcula bases y dimensiones de V_1 , V_2 , $V_1 \cap V_2$ y $V_1 + V_2$ y decide si se puede escribir $V = V_1 + V_2$ ó $V = V_1 \oplus V_2$.

SEGUNDO PARCIAL

6. (TEORÍA) (2 puntos) Dados (V, \langle, \rangle) espacio vectorial euclidiano sobre \mathbb{R} y U subespacio de vectorial de V , sea $U^\perp = \{v \in V : 0 = \langle v, u \rangle, \forall u \in U\}$. Demuestra que U^\perp es un subespacio vectorial de V y que $V = U \oplus U^\perp$.

7. ¿VERDADERO O FALSO? Si es verdadero, da una demostración y si es falso, encuentra un contraejemplo.

a. (1 punto) Si \mathcal{A} es un espacio afín de dimensión n , entonces los puntos $A_1, A_2, \dots, A_{n+1} \in \mathcal{A}$ son afínmente independientes si y solo si el siguiente determinante no se anula:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn+1} \end{pmatrix}$$

donde $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})^T$ son las coordenadas de A_j respecto de cierto sistema de referencia cartesiano \mathcal{R} de \mathcal{A} dado.

b. (1 punto) Dado $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ con A regular, se verifica que las matrices AB y BA tienen el mismo polinomio característico.

8. (2 puntos) Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}^2$ dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

calcula dimensiones y ecuaciones de $\ker f$ e $\operatorname{im} f$. Calcula una base y la dimensión de $\mathbb{K}^2 / \operatorname{im} f$ y pon ejemplos de dos formas lineales en $\mathbb{K}^2 / \operatorname{im} f$ distintas.

9. (2 puntos) Dada la cónica afín euclidiana real \mathcal{C} de ecuación $9x^2 + 6y^2 - 4xy + 2\alpha x + \gamma = 0$, encuentra una condición necesaria y suficiente (en términos de $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$) para que \mathcal{C} sea una elipse real. Calcula su centro en el sistema de coordenadas inicial.

10. (1 punto) Calcula la matriz de la simetría s_H de \mathbb{R}^3 sobre el plano H de ecuación $3x_1 + 4x_3 = 0$ (respecto de la base canónica en salida y llegada). Calcula la proyección del vector de coordenadas $(1, 1, 1)^T$ sobre H .

11. (1 punto) En \mathbb{R}^4 calcula la posición relativa de los planos r y r' , donde $r : \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$
 $r' = P + L(e_1, e_2 + e_4)$ y P es el punto de coordenadas $(1, 2, 3, 4)^T$.

12. (1 punto extra) Calcula todo lo que sepas de la cónica del ejercicio 9: vértices, focos, excentricidad, semilado recto, directrices, representación gráfica detallada.