J.I. Díaz y A.M. Ramos

Resultados positivos y negativos sobre la controlabilidad aproximada de problemas parabólicos semilineales.

1 Noción de controlabilidad aproximada.

Dados $\Omega \subset I\!\!R^n$ y $\omega \subset \Omega$ abiertos regulares y acotados, pretendemos estudiar la "controlabilidad" del problema:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} y_t - \Delta y + f(y) = u\chi_\omega & \text{en } Q = \Omega \times (0,T) \\ y(x,t) = 0 & \text{en } \Sigma = \partial\Omega \times (0,T) \\ y(x,0) = y_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $f(s) = \lambda \mid s \mid^{p-1} s$, $p > 0$ y $\lambda > 0$. Denotaremos por $y(t:u)$ a $y(\cdot,t)$ con y solución de $(\mathcal{P})$.

Definición 1 *Diremos que el sistema $\mathcal{P}$ verifica la propiedad de "*Controlabilidad Exacta*" respecto del espacio de estados X y de controles $\mathcal{U}$, si para cualesquiera $y_d \in X$ y $T > 0$, existe $u \in \mathcal{U}$ tal que $y(T;u) = y_d$.*

Esta propiedad es típica de un buen número de problemas reversibles (como p.e. la ecuación de ondas). Sin embargo, el efecto regularizante de los problemas parabólicos (como p.e. la ecuación del calor), impide en general esta propiedad. Por tal motivo conviene debilitar los anteriores requisitos:

Definición 2 *Diremos que el sistema $\mathcal{P}$ verifica la propiedad de "*Controlabilidad Aproximada*" respecto del espacio de estados X y de controles $\mathcal{U}$, si para cualesquiera $y_d \in X$ y $T > 0$ existe $\{u_n\}_{n\in I\!\!N} \subset \mathcal{U}$ tal que $y(T;u_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y_d$ en X.*

Observaciones

1) Una primera respuesta afirmativa sobre la controlabilidad aproximada para el sistema $\mathcal{P}$ se refiere al caso lineal ($\lambda = 0$, ó $\lambda > 0$ y $p = 1$) y fué dada en Lions [1968]. Posteriormente Henry [1978] extendió tal resultado al caso no lineal ($p > 0$) pero con $\omega = \Omega$ (una demostración muy sencilla se debe a Díaz-Fursikov [1993]).

2) Una cuestión interesante en las aplicaciones es la restricción sobre el signo de los controles. Por ejemplo, si $y_d \in y(T:0) + L^2_+(\Omega)$, nos preguntamos si se puede elegir el control u en el conjunto $L^2_+(\omega \times (0,T))$. Esta cuestión fué ya suscitada en Díaz [1990] donde se resolvió afirmativamente para el caso lineal con control sobre el contorno. Posteriormente, en Díaz-Henry-Ramos [1993] se obtuvo tal propiedad para la formulación $(\mathcal{P})$, e.d. con control en el interior.

En esta comunicación obtendremos resultados afirmativos y negativos sobre la controlabilidad aproximada para el caso no lineal con controles locales, e.d. cuando $\omega \subset\subset \Omega$. Este caso es físicamente más realista que el caso $\omega = \Omega$ y, como veremos, de respuesta más compleja (dependerá de los valores de p).

2 El caso sublineal ($0 < p \leq 1$).

El caso $p = 1$ corresponde al modelo lineal. Diferentes métodos pueden ser usados para este cometido. Citemos, por ejemplo, los trabajos Lions [1968] (vía el Teorema de Hahn Banach), Lions [1990] (método constructivo) y Lions [1991] (argumento de dualidad).

Para el caso $0 < p < 1$, es de interes el artículo Seidman [1974] en donde aparece un resultado abstracto cuya aplicabilidad al problema $\mathcal{P}$ fué señalada en Díaz [1990], pero resulta de gran sofistificación

El objetivo de esta sección es dar una demostración directa para el caso $0 < p < 1$. Nos basaremos en el método utilizado en Fabre-Puel-Zuazua [1992] [1993] relativo al caso

$$\begin{cases} f \text{ localmente Lipschitz} \\ |f(s)| \leq a + b|s| \text{ si } |s| > M \end{cases}$$

Tal método consta de dos etapas:

a)Argumento de dualidad (siguiendo esencialmente a Lions [1991]).

b)Aplicación del Teorema de punto fijo de Kakutani.

Nuestro resultado es el siguiente

Teorema 3 *Supuesto $0 < p \leq 1$, el problema $(\mathcal{P})$ tiene la propiedad de la controlabilidad aproximada con $X = L^q(\Omega)$, $1 < q < \infty$ y controles u de la forma*

$$u \in |\varphi|_{L^1(\omega\times(0,T))} sgn(\varphi)\chi_{\omega\times(0,T)}$$

(donde φ es la solución de cierta ecuación lineal retrógrada en el tiempo). □

Idea de la demostración.
Definamos

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{f(s)-f(s_0)}{s-s_0} & s \neq s_0 \\ k & s = s_0 \end{cases} \quad (s_0 \neq 0).$$

Como $f(s) = \lambda |s|^{p-1} s$ es localmente Lipschitz en s_0 si $s_0 \neq 0$ se tiene que $g \in L^\infty(I\!R)$.

Dado $z \in L^q(Q)$ descomponemos $y = L(z) + Y(z)$, donde

$$\begin{cases} L_t - \Delta L + g(z)L = -f(s_0) + g(z)s_0 & \text{en } Q \\ L = 0 & \text{en } \Sigma \\ L(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

e $Y(z)$ se explicitará con la ayuda del siguiente
Lema (Fabre-Puel-Zuazua [1992] [1993]) *El resultado del teorema es cierto para el caso lineal con potencial (e.d. cambiando $f(y)$ por $a(x,t)y$, con $a(x,t) \in L^\infty(Q)$).* $\square$

Idea de la demostración del Lema

El resultado se obtiene viendo que si $\hat{\varphi}^0 \in L^{q'}(\Omega)$ es el único punto de $L^{q'}(\Omega)$ para el que se alcanza el mínimo del funcional

$$J(\varphi^0) = \frac{1}{2}\left(\int_{\omega\times(0,T)} \mid \varphi \mid dxdt\right)^2 + \varepsilon \mid \varphi^0 \mid_{q'} - \int_\Omega y_d \varphi^0 dx,$$

donde φ es la solución de

$$\begin{cases} -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi + a(x,t)\varphi & = & 0 & \text{en } Q \\ \varphi & = & 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(T) & = & \varphi^0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y si $\hat{\varphi}$ es la correspondiente solución del anterior sistema con $\hat{\varphi}(T) = \hat{\varphi}^0$, se puede encontrar (utilizando la subdiferenciabilidad del operador J) un control $v \in \mid \hat{\varphi} \mid_{L^1(\omega\times(0,T))} sgn(\hat{\varphi})\chi_{\omega\times(0,T)}$ para el que la solución del problema lineal $\mathcal{P}$ cumple

$$\mid y(T) - y_d \mid \leq \varepsilon.$$

$\blacksquare$

Fin de la Idea de la demostración del Teorema 1.

Utilizando el lema anterior, para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un control $v(z, y_0, y_d) \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_{\omega\times(0,T)}$ tal que la solución $Y = Y(z)$ de

$$\begin{cases} Y_t - \Delta Y + g(z)Y & = & |\varphi(z,y_0,y_d)|_{L^1(\omega\times(0,T))} v(z,y_0,y_d)\chi_\omega & \text{en } Q \\ Y & = & 0 & \text{en } \Sigma \\ Y(0) & = & 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

cumple

$$|Y(T) - (y_d - L(T))|_q \leq \varepsilon.$$

Sumando, resulta que $y = L + Y$ es solución de

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + g(z)y &= -f(s_0) + g(z)s_0 + |\varphi(z, y_0, y_d)|_1 v(z, y_0, y_d)\chi_\omega \quad \text{en } Q \\ y &= 0 \quad \text{en } \Sigma \\ y(0) &= y_0 \quad \text{en } \Omega \\ |y(T) - y_d|_q \leq \varepsilon. \end{cases}$$

De este modo, si llamamos $y(v)$ a la solución de

$$\begin{cases} y_t - \Delta y + g(z)y &= -f(s_0) + g(z)s_0 + |\varphi(z, y_0, y_d)|_1 v\chi_\omega \quad \text{en } Q \\ y &= 0 \quad \text{en } \Sigma \\ y(0) &= y_0 \quad \text{en } \Omega \end{cases}$$

y

$$\Lambda(z) = \{y(v),\ v \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_\omega;\ |y(T) - y_d|_q \leq \varepsilon\},$$

se tiene que para todo $z \in L^q(Q),\ \Lambda(z) \neq \emptyset$. Por último, aplicando el Teorema de Punto Fijo de Kakutani (como en Fabre-Puel-Zuazua [1992] [1993]), existe y tal que $y \in \Lambda(y)$, lo que acaba la demostración. $\blacksquare$

Observación. *El Teorema 1 se puede generalizar a $f(s)$ tales que cumplan:*

1. *Existe solución de $(\mathcal{P})$.*

2. *Existen $M > 0,\ a > 0,\ y\ b > 0$ tales que $|f(s)| \leq a + b|s|$, si $|s| > M$.*

3. *Existen $s_0 \in I\!R,\ c > 0\ y\ \delta > 0$ tales que $|f(s) - f(s_0)| \leq c|s - s_0|$, si $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$.*

Los detalles pueden verse en Díaz-Ramos [1993].

3 El caso superlineal ($p > 1$).

Ahora, el resultado sobre controlabilidad aproximada es en general negativo, puesto que mostraremos que todas las soluciones se pueden acotar uniformemente (independientemente de los controles) sobre $\overline{\Omega} - \overline{\omega}$. Un primer ejemplo es debido a A. Bamberger (publicado en Henry [1978]): Dados $\Omega = (0, 1),\ p > 1$, y $v \in \mathcal{U} = L^2(0, T)$, se plantea el problema:

$$\begin{cases} y_t - y_{xx} + |y|^{p-1}y = 0 & \text{en } Q \\ y_x(t, 0) = v(t);\ y(t, 1) = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces, si $\Omega_\varepsilon = (\varepsilon, 1)\ \ (0 < \varepsilon < 1)$, se tiene que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} |y(T, x)|^2 dx \leq C_\varepsilon(\text{ independiente de } v).$$

Un método distinto es el desarrollado en Díaz [1990] para el caso de control global sobre el contorno y que a continuación adaptamos a nuestro problema $(\mathcal{P})$.

Teorema 4 *Supongamos $p > 1$. Sea $u \in \mathcal{U} = L^2(\omega \times (0,T))$ arbitrario y sea $y(x,t:u)$ la solución de $(\mathcal{P})$ correspondiente. Entonces se tiene*

$$|y(x,t:u)| \leq C(p,n)\left(\frac{1}{d(x)^{\theta}} + \frac{1}{t^{\frac{\theta}{2}}}\right) \quad c\forall (x,t) \in (\Omega - \omega) \times (0,T),$$

siendo

$$\theta = \frac{2}{p-1}, \ d(x) = dist(x, \partial\omega).$$

Idea de la demostración. Basta probar

$$y(x,t:u) \leq C(p,n)\left(\frac{1}{d(x)^{\theta}} + \frac{1}{t^{\frac{\theta}{2}}}\right) \quad c\forall (x,t) \in (\Omega - \omega) \times (0,T),$$

(la otra desigualdad es analoga).
El resultado se obtiene mostrando que la función

$$Y(x,t) = C(p,n)\left(\frac{1}{d(x)^{\theta}} + \frac{1}{t^{\frac{\theta}{2}}}\right)$$

verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} Y_t - \Delta Y + |Y|^{p-1}Y \geq 0 & \text{en } (\Omega - \omega) \times (0,T) \\ Y = +\infty & \text{en } (\partial\omega) \times (0,T) \\ Y \geq 0 & \text{en } (\partial\Omega) \times (0,T) \\ Y(x,0) = +\infty & \text{en } (\Omega - \omega) \end{cases}$$

Por último, una aplicación del principio del máximo sobre $(\Omega - \omega) \times (0,T)$ nos dá el resultado. $\blacksquare$

Corolario. *Si $p > 1$, $(\mathcal{P})$ no verifica la propiedad de controlabilidad aproximada.* $\square$

Observaciónes.

1.- En un trabajo en elaboración (Díaz-Fursikov-Ramos) se estudia el conjunto de puntos de alcanzabilidad para problemas superlineales.

2.- Parece posible extender los resultados de esta comunicación a otros problemas no lineales de estructura más compleja que los semilineales, tales como la ecuacion de los medios porosos y del $(m+1)$-Laplaciano:

$$y_t - \Delta y^m = u\chi_{\omega}$$

$$y_t - \Delta_{(m+1)} y = u\chi_{\omega}.$$

Así, si $m > 1$ hemos obtenido respuestas negativas y para $0 < m < 1$ conjeturamos que las respuestas serán positivas.

Agradecimientos: Proyectos PB90/0620 (J.I. Díaz) y AMB93-0199 (A.M. Ramos) de la DGICYT.

Referencias

Díaz,J.I. [1990]: *Sobre la controlabilidad aproximada de problemas no lineales disipativos.* Actas de "Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos". Universidad de Malaga (Octubre-1990).

Díaz,J.I.-Fursikov,A.V. [1993]: *A simple proof of the approximate controllability from the interior for nonlinear evolution problems.* Aparecerá en Applied Math. Letters.

Díaz,J.I.-Henry,J.-Ramos,A.M. [1993]: Artículo en preparación.

Díaz,J.I.-Ramos,A.M. [1993]: *Positive and negative controllability results for semilinear parabolic problems.* Aparecerá en Rev. Real Academia de Ciencias de Madrid.

Fabre,C.-Puel,J.P.-Zuazua,E. [1992]: *Contròlabilité approchée de l'équation de la chaleur semi-linéaire.* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 807-812.

Fabre,C.-Puel,J.P.-Zuazua,E. [1993]: *Approximate controllability of the semilinear heat equation.* Preprint.

Henry,J. [1978]: *Etude de la contrôlabilité de certaines équations paraboliques.* Thèse d'Etat, Université Paris VI.

Lions,J.L. [1968]: *Contrôle optimal de systemes gouvernés par des equations aux derivées partielles.* Dunod.

Lions,J.L. [1990]: *Remarques sur la contrôlabilité approchée*, Actas de "Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos". Universidad de Malaga.

Lions,J.L. [1991]: *Exact Controllability for distributed systems. Some trends and some problems.* Applied and Industrial Mathematics, pp. 59-84.

Seidman,T.I. [1974]: *A well-posed problem for the heat equation.* Bull. Amer. Math. Soc. 80, pp. 901-902.

J.I. Díaz y A.M.Ramos
Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
28040-Madrid, Spain.