Memoria presentada por

Angel Manuel Ramos del Olmo

para optar al Grado de Licenciatura

en Matemáticas

CONTROLABILIDAD APROXIMADA DE PROBLEMAS DE TIPO PARABOLICO

Director: J. I. Díaz Díaz

Universidad Complutense de Madrid

Dpto. de Matemática Aplicada

Madrid, Junio 1993.

Indice

Introducción.

Uno de los principales objetivos de esta memoria es el estudio de la controlabilidad aproximada para la ecuación semilineal

$$\frac{\partial}{\partial t}y(t,x) - \Delta y(t,x) + f(y(t,x)) = Bu(t,x),\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega,$$

con Ω abierto regular y acotado de $I\!R^n$, $f : I\!R \to I\!R$, u control exterior ejercido sobre el sistema y Bu la manera en que tal control actua sobre el estado (junto con ciertas condiciones iniciales y de frontera sobre las que a veces tambien actua el control). Este tipo de problemas es de gran importancia en diversos contextos. Así, por ejemplo, aparece en el estudio de las ecuaciones que modelizan el clima de la tierra (vease Díaz [6]), el flujo de un fluido, etc...

El capítulo 1 contiene algunos resultados previos que de hecho solo pretenden ilustrar técnicas cercanas al resto de esta memoria.

En el capítulo 2, se trata el caso lineal ($f \equiv 0$), y se dá respuesta afirmativa a la controlabilidad aproximada en los casos de control sobre la condición de Neumann y de control local sobre el abierto, siguiendo resultados pioneros de Lions [28] y [29]. También se analizan los casos de control sobre la frontera o sobre todo el abierto, bajo una restricción en el signo del control a ejercer, siguiendo a Díaz [8] y Díaz-Henry-Ramos [13], respectivamente. Por último, se especifican en algunos casos especiales, ciertos espacios funcionales para los que hay controlabilidad exacta. Tambien se dán (siguiendo a Lions [29] y Fursikov-Imanuvilov [20]) algunos métodos constructivos sobre los controles a tomar para la ecuación del calor y el problema de Stokes.

En el capítulo 3, se trata el caso sublineal ($\mid f(s) \mid \leq a + b \mid s \mid^p$ con $p \leq 1$). Se muestra la controlabilidad aproximada para controles actuando sobre una parte del abierto, ofreciendo una pequeña variación de resultados recientes debidos a Fabre-Puel-Zuazua [15].

En el capítulo 4, se trata el caso superlineal. Se muestra que la respuesta puede ser negativa siguiendo a Henry [22] y Díaz [8]. Un resultado afirmativo es presentado para el caso de control sobre todo el dominio, incluso cuando se incluyen restricciones sobre el signo de control (Esta última conclusión es uno de los objetivos del artículo Díaz-Henry-Ramos [13]).

Finalmente, en el capítulo 5, se abren nuevos caminos relacionados con la controlabilidad, cuando la respuesta a la controlabilidad aproximada es en general negativa, siguiendo a Fursikov-Imanuvilov [20]. En particular, se demuestra la no controlabilidad aproximada de la ecuación de Burgers y se estudian nuevas cuestiones, como la obtención de puntos de alcanzabilidad aproximadamente estables, etc...

El autor agradece al profesor J.I. Díaz su ayuda y paciencia en la dirección de este trabajo, así como al "reducido" grupo de compañeros de despacho (Gema, Lourdes, Lucero, Carlos, Luis, Paco y Sorin) por sus ayudas y comentarios.

Capítulo 1

ALGUNOS RESULTADOS PREVIOS.

1.1 Notación.

Vamos a considerar $V \subset H$, espacios de Hilbert con normas $\| \,.\, \|$ y $| \,.\, |$ respectivamente; V' el dual de V, con lo que $V \subset H \subset V'$ $(H' \simeq H)$; t será la variable "tiempo" con $t \in (0,T)$, $T < \infty$.

Sobre V supondremos una familia de formas bilineales: $\varphi,\ \psi \mapsto a(t;\varphi,\psi)$ $\forall t \in (0,T)$, cumpliendo:

$$(1.1) \qquad t \mapsto a(t;\varphi,\psi) \text{ es una función medible sobre } (0,T)\ \forall \varphi,\psi \in V$$

$$(1.2) \qquad | a(t;\varphi,\psi) | \leq c \| \varphi \| \| \psi \| \ \ \forall t \in (0,T),\ \forall\ \varphi,\ \psi \in V$$

$$(1.3) \qquad \exists\ \lambda \in I\!R \ /\ a(t;\varphi,\varphi) + \lambda \mid \varphi \mid^2 \geq \alpha \| \varphi \|^2,\ \alpha > 0\ \forall \varphi \in V,\ \forall t \in (0,T).$$

Dado que $\forall t \in]0,T[$, y $\forall \varphi \in V$ $\psi \mapsto a(t;\varphi,\psi)$ es una forma lineal y continua, $\exists A(t)\varphi \in V'$ / $a(t;\varphi,\psi) = (A(t)\varphi,\psi)_{V' \times V}$.

De este modo si definimos $L^2(0,T;V)$ del siguiente modo:

$$(1.4) \qquad f \in L^2(0,T;V) \ \Leftrightarrow\ f(t) \in V\ \forall t \in (0,T) \text{ y } \int_0^T \| f(t) \|_V^2\, dt < \infty,$$

entonces se puede definir analogamente $L^2(0,T;V')$ con lo que tenemos:

$$(1.5) \qquad A(.) \in \mathcal{L}(L^2(0,T;V);L^2(0,T;V'))$$

donde estamos considerando que $A(.)f \in L^2(0,T;V')$ si $f \in L^2(0,T;V)$ y $(A(.)f)(t) = A(t)f(t) \in V'$.

Demostremos (1.5):

$$\| A(t)f(t) \|_{V'} = \sup_{(\varphi \in V; \|\varphi\| \neq 1)} (A(t)f(t),\varphi) = \sup_{(\varphi \in V; \|\varphi\| \leq 1)} a(t;f(t),\varphi) \leq$$
$$\sup_{(\varphi \in V; \|\varphi\| \leq 1)} c \| f(t) \|_V \| \varphi \|_V = c \| f(t) \|_V$$

y por tanto:

$$\| A(.)f \|_{L^2(0,T;V')} = \left(\int_0^T \| A(t)f(t) \|_{V'}^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^T c^2 \| f(t) \|_V^2 \right)^{\frac{1}{2}} = c \| f \|_{L^2(0,T;V)}$$

con lo que queda probado (1.5)

Nos interesará tambien, dado $f \in L^2(0,T;V)$ dar algún tipo de significado a $\frac{\partial}{\partial t}f$, para ello recurrimos a la teoría de distribuciones:

Definimos el espacio de distribuciones sobre]0,T[con valores en V como:

$$\mathcal{D}'(]0,T[;V) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0,T[;V))$$

es decir, si $h \in \mathcal{D}'(]0,T[;V)$, entonces $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$, $h(\varphi) \in V$ y $\varphi \to h(\varphi)$ es lineal y continua de $\mathcal{D}(]0,T[)$ en V.

Ahora, si $h \in \mathcal{D}'(]0,T[;V)$ podemos definir $\frac{\partial}{\partial t}h$, del siguiente modo:

$$\varphi \to \frac{\partial h}{\partial t}(\varphi) = -h(\frac{\partial \varphi}{\partial t})\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$$

que también define un campo lineal de $\mathcal{D}(]0,T[) \to V$, por lo que de nuevo $\frac{\partial}{\partial t}h \in \mathcal{D}'(]0,T[;V)$.

La toplogía de $\mathcal{D}'(]0,T[;V)$ está caracterizada por:

$$f_n \to f \text{ en } \mathcal{D}'(]0,T[;V) \text{ si } f_n(\varphi) \to f(\varphi)\ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$$

(con lo que consecuentemente $\frac{\partial}{\partial t}f_n \to \frac{\partial}{\partial t}f$ en $\mathcal{D}'(]0,T[;V)$ de modo obvio).

De este modo, si $f \in L^2(0,T;V)$, podemos definir, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$, $f(\varphi)$ del siguiente modo:

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt \text{ (integral generalizada con valores en V)}$$

con lo que $\varphi \to f(\varphi)$ es una función lineal y continua de $\mathcal{D}(]0,T[) \to V$, y en consecuencia podemos construir un campo lineal:

$$\begin{array}{rcl} L^2(0,T;V) & \mapsto & \mathcal{D}'(]0,T[;V) \\ f & \longmapsto & \hat{f} \text{ con } \hat{f}(\varphi) = \displaystyle\int_0^T f(t)\varphi(t)dt \end{array}$$

que al ser una inyección continua, permite identificar $\hat{f}$ con f y considerar $L^2(0,T;V) \subset \mathcal{D}'(]0,T[;V)$. Como consecuencia de esto, podemos introducir el espacio de Hilbert:([1])

$$W^{1,2}(0,T;V) = \{f\ /\ f \in L^2(0,T;V),\ \frac{\partial f}{\partial t} \in L^2(0,T;V')\}$$

dotado con la norma:

$$\| f \|_{W^{1,2}(0,T;V)} = \left(\int_0^T \| f(t) \|_V^2\ dt + \int_0^T \| \frac{\partial f}{\partial t} \|_{V'}^2\ dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Un resultado conocido sobre este espacio (Ver Th. 3.1 en el capítulo 1 de [30]), es el siguiente:

Teorema 1.1 *Todas las funciones $f \in W^{1,2}(0,T;V)$, son salvo modificaciones sobre conjuntos de medida cero, continuas de $[0,T] \to H$, es decir:*

$$W^{1,2}(0,T;V) \subset C^0([0,T];H). \quad \square$$

[1] A este conjunto tambien se le denomina $H^1(0,T;V)$.

1.2 Teorema de existencia y unicidad de problemas de evolución de primer orden.

1.2.1 Planteamiento del problema.

El problema de evolución considerado es encontrar $y \in W^{1,2}(0,T;V)$ tal que:

$$\frac{\partial y}{\partial t} + A(t)y = f \ , f \in L^2(0,T;V') \tag{1.6}$$

$$y(0) = y_0 \ , y_0 \in H \tag{1.7}$$

Es claro que gracias al Teorema 1.1, la expresión (1.7) tiene sentido.
Como respuesta a este problema se tiene

Teorema 1.2 *En las condiciones (1.1), (1.2), (1.3), el problema (1.6) y (1.7) admite una única solución en* $W^{1,2}(0,T;V)$. *Ademas la solución depende continuamente de los datos: es decir, la aplicación bilineal* $(f, y_0) \to y$ *es continua de* $L^2(0,T;V') \times H \to W^{1,2}(0,T;V)$. □

Observación 1.3 Si $T < \infty$, se puede suponer $\lambda = 0$ en (1.3), pues si escribimos $y = exp(kt)z$, entonces (1.6) y (1.7) son equivalentes a:

$$\begin{aligned} (A(t) + kI)z + \frac{\partial z}{\partial t} &= exp(-kt)f \\ z(0) &= y_0 \end{aligned}$$

con lo que eligiendo $k = \lambda$ y reemplazando en el problema $A(t)$ por $A(t) + kI$ tenemos probada la observación.
■

Probemos por tanto el Teorema 1.2, asumiendo que $\lambda = 0$.

1.2.2 Demostración de la unicidad.

Sea y solución de (1.6) y (1.7) con $f = 0$, $y_0 = 0$. Veamos que $y = 0$. En efecto:
Hagamos en (1.6) el producto escalar con $y(t)$. Se obtiene

$$a(t; y(t), y(t)) + (\frac{\partial y(t)}{\partial t}, y(t)) = 0$$

e integrando:

$$\int_0^T (\frac{\partial y(t)}{\partial t}, y(t))dt = \int_0^T \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \mid y(t) \mid^2 dt = \frac{1}{2} \mid y(T) \mid^2 \ \ \text{(pues } y(0) = 0\text{)}$$

con lo que

$$\int_0^T a(t; y(t); y(t))dt + \frac{1}{2} \mid y(t) \mid^2 = 0.$$

Ademas debido a la Observación 1.3

$$\alpha \int_0^T \parallel y(t) \parallel^2 dt + \frac{1}{2} \mid y(T) \mid^2 \leq 0$$

con lo que, efectivamente $y \equiv 0$.

1.2.3 Demostración de la existencia (Metodo de Galerkin).

Para simplificar las cosas supongamos V separable, es decir, existe un conjunto numerable y denso en V. Además se puede encontrar una base hilbertiana $\omega_1, ..., \omega_m, ...,$ en V. Así, cualquier elección finita $\omega_{i_1}, ...\omega_{i_n}$ forma un conjunto linealmente independiente y las combinaciones $\sum_{j=1}^{n} \xi_{i_j} \omega_{i_j}$, con $\xi_{i_j} \in I\!R$, son densas en V.

Definimos la *"solución aproximada"* de (1.6), (1.7) como

$$y_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t) \omega_i$$

donde los g_{i_m} son elegidos tales que

$$(\frac{\partial}{\partial t} y_m(t), \omega_j) + a(t; y_m, \omega_j) = (f(t), \omega_j), \quad 1 \leq j \leq m, \tag{1.8}$$

$$y_m(0) = y_{0,m} = \sum_{i=1}^{m} \xi_{i_m} \omega_i \text{ donde } \sum_{i=1}^{m} \xi_{i_m} \omega_i \to y_0 \text{ en } H, \text{ cuando } m \to \infty. \tag{1.9}$$

El sistema (1.8), (1.9) es un sistema lineal de m ecuaciones en g_{i_m} de la forma:

$$\mathcal{W}_m \frac{\partial}{\partial t} g_m + \mathcal{A}_m(t) g_m = f_m \ , \ g_m(0) = \{\xi_{i_m}\}$$

donde

$$\begin{array}{ll} \mathcal{W}_m = \| (\omega_i, \omega_j) \| & \mathcal{A}_m(t) = \| a(t; \omega_i, \omega_j) \| \\ g_m(t) = \{g_{i_m}(t)\} & f_m(t) = \{(f(t), \omega_j)\} \end{array}$$

con $\{x_j\} \in I\!R^m$.

Ahora, como $det \mathcal{W}_{\Updownarrow} \neq 0$, la teoría sobre sistemas de ecuaciones ordinarias asegura que el problema (1.8), (1.9) admite una única solución. Por tanto y_m está bien definido.

A continuación probaremos que $\lim_{m \to \infty} y_m = y$, siendo y una solución de (1.6),(1.7). Multiplicando (1.8) por g_{j_m} y sumando sobre j se obtiene:

$$(\frac{\partial}{\partial t} y_m(t), y_m(t)) + a(t; y_m(t), y_m(t)) = (f(t), y_m(t))$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mid y_m(t) \mid^2 + a(t; y_m(t), y_m(t)) = (f(t), y_m(t)),$$

con lo que

$$\begin{aligned} \mid y_m(T) \mid^2 + 2\alpha \int_0^T \| y_m(t) \|^2 \, dt &\leq \mid y_{0_m} \mid^2 + 2 \int_0^T (f(t), y_m(t)) dt \\ &\leq \mid y_{0_m} \mid^2 + 2 \int_0^T \| f(t) \|_{V'} \| y_m(t) \|_V \, dt \\ &\leq \mid y_{0_m} \mid^2 + \alpha \int_0^T \| y_m(t) \|^2 \, dt + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \| f(t) \|_{V'}^2 \, dt. \end{aligned}$$

Finalmente como por (1.9) $\mid y_{0_m} \mid \leq \mid y_0 \mid$, entonces

$$\int_0^T \| y_m(t) \|^2 \, dt \leq c \left(\mid y_0 \mid^2 + \int_0^T \| f(t) \|_{V'}^2 \, dt \right).$$

Por tanto $\{y_m(t)\}_{m\in I\!N}$ está acotada en $L^2(0,T;V)$, con lo que podemos extraer una subsucesión y_μ tal que

(1.10) $$y_\mu \rightharpoonup z \text{ débilmente en } L^2(0,T;V).$$

Sea ahora j fijo aunque arbitrario y sea $\mu > j$. Entonces (1.8) es válido con $m = \mu$. Multiplicando (1.8) por $\varphi(t)$, donde

(1.11) $$\varphi \in C^1[0,T],\ \varphi(T) = 0$$

e integrando sobre $(0,T)$, tenemos que si $\varphi_j(t) = \varphi(t)\omega_j$, entonces

$$\int_0^T [-(y_\mu(t), \varphi_j^{'}(t)) + a(t; y_\mu(t), \varphi_j(t))]dt = \int_0^T (f(t), \varphi_j(t))dt + (y_{0_\mu}, \varphi_j(0)).$$

Utilizando (1.10) podemos pasar al límite y resulta

(1.12) $$\int_0^T [-(z, \varphi_j^{'}(0)) + a(t; z, \varphi_j)]dt = \int_0^T (f, \varphi_j)dt + (y_0, \varphi_j(0)).$$

Pero esto es cierto para cualquier φ satisfaciendo (1.11), con lo que si tomamos $\varphi \in D(]0,T[)$ queda:

$$\frac{\partial}{\partial t}(z(t), \omega_j) + a(t; z(t), \omega_j) = (f(t), \omega_j) \text{ (la derivada es tomada en } D'(0,T)).$$

Ahora como j es arbitraria y las combinaciones lineales finitas de ω_j son densas en V, se deduce

(1.13) $$\frac{\partial z}{\partial t} + A(t)z = f$$

con lo que $\dfrac{\partial}{\partial t}z = f - A(t)z \in L^2(0,T;V')$, y por tanto $z \in W^{1,2}(0,T;V)$. De este modo podemos integrar por partes en (1.12) y teniendo en cuenta (1.13) obtenemos

$$(z(0), \omega_j)\varphi(0) = (y_0, \omega_j)\varphi(0)\ \forall j,\ \forall \varphi,$$

con lo que $(z(0), \omega_j) = (y_0, \omega_j)\ \forall j$, y por tanto $z(0) = y_0$ con lo que $y = z$ es una solución. Además

$$y_m \rightarrow y \text{ débilmente en } L^2(0,T;V)$$
$$\int_0^T \| y(t) \|^2 dt \leq c\left(| y_0 |^2 + \int_0^T \| f(t) \|_{V'}^2 dt \right)$$

y puesto que $\dfrac{\partial}{\partial t}y = f - A(t)y$ tenemos

$$\| \frac{\partial y}{\partial t} \|_{L^2(0,T;V')}^2 \leq c' \left(| y_0 |^2 + \int_0^T \| f(t) \|_{V'}^2 dt \right)$$

con lo que obtenemos la dependencia continua de la solución respecto de los datos.

1.2.4 Ejemplo.

Consideremos el siguiente caso:

$$(1.14) \qquad \begin{cases} Q &= Q_T = (0,T)\times\Omega \text{ , donde } \Omega \text{ es un subconjunto abierto de } \mathbb{R}^n, \\ \Gamma &= \text{ frontera de } \Omega, \\ \Sigma &= \Sigma_T = (0,T)\times\Gamma, \text{ frontera lateral de } Q, \end{cases}$$

junto con

$$(1.15) \qquad \begin{cases} a_{i_j} \in L^\infty(Q) \\ \exists\ \alpha > 0 \ / \ \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \alpha(\xi_1^2 + ... + \xi_n^2), \ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n, \ c\forall x \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Ahora si $\varphi, \ \psi \in H^1(\Omega)$, consideremos la forma bilineal ($c\forall\ t \in (0,T)$):

$$a(t;\varphi,\psi) = \int_\Omega a_{i,j}(t,x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}dx.$$

Si tomamos como espacio $V = H_0^1(\Omega)$, y aplicamos el Teorema 1.2, obtenemos la existencia de un único $y \in W^{1,2}(0,T;V)$, satisfaciendo

$$(1.16) \quad \frac{\partial y}{\partial t} + A(t)y = f \text{ en } Q, \ (A(t)y = -\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(a_{i_j}(t,x)\frac{\partial y}{\partial x_j}); \quad f \in L^2(0,T;V')),$$

$$(1.17) \qquad y(0,x) = y_0(x) \text{ en } \Omega.$$

Recordemos que la condición $y \in W^{1,2}(0,T;V)$, implica que

$$y \in L^2(0,T;V), \ \frac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T;V').$$

Pero si $y \in L^2(0,T;V)$ y satisface (1.16), entonces $\frac{\partial}{\partial t}y \in L^2(0,T;V')$, con lo que para obtener el resultado basta con observar que el teorema nos ha dado que $y \in L^2(0,T;V)$, o incluso

$$(1.18) \qquad y, \ \frac{\partial y}{\partial x_i} \in L^2(Q), \ y = 0 \text{ en } \Sigma \ (V = H_0^1(\Omega)).$$

Resumiendo, bajo la hipótesis (1.15), si $y_0 \in L^2(\Omega)$, y $f \in L^2(0,T;V')$, entonces existe un único y satisfaciendo (1.18), (1.16) y (1.17).

1.3 Control óptimo.

1.3.1 Algunos resultados previos sobre minimización de funcionales.

Sea $\mathcal{U}$ un espacio de Hilbert; $\pi(.,.)$ una forma bilineal, simétrica y continua sobre $\mathcal{U}$;L una forma lineal y continua sobre $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_{ad}$ un conjunto cerrado y convexo de $\mathcal{U}$.

Consideramos el funcional cuadrático

$$J(v) = \pi(v,v) - 2L(v) \qquad (v \in \mathcal{U})$$

que se supone coercitivo, en el sentido que

$$\pi(v,v) \geq c \parallel v \parallel^2 \ \ \forall\ v \in \mathcal{U}, \ c > 0.$$

Se tienen los siguientes resultados:

Teorema 1.4 *Bajo las condiciones anteriores existe un único elemento $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v). \quad \square$$

Demostración : Ver capítulo 1 de [28]. $\blacksquare$

Mas en general se tiene

Teorema 1.5 *Sea E un espacio de Banach reflexivo: $A \subset E$ cerrado, convexo y no vacio; $\varphi : A \to (-\infty, \infty]$ convexa y s.c.i (semicontinua inferiormente) y $\varphi \not\equiv \infty$.*

Supongamos que

(1.19) $$\lim_{\|x\| \to \infty} \varphi(x) = \infty.$$

Entonces φ alcanza su valor mínimo en A. Es decir $\exists\ x_0 \in A$ tal que

$$\varphi(x_0) = \inf_{x \in A} \varphi(x) (= \min_{x \in A} \varphi(x)). \quad \square$$

Demostración : Se define $I = \inf_{x \in A} \varphi(x) < \infty$ (pues $\varphi \not\equiv \infty$). Entonces existe $x_n \in A$ tal que $\varphi(x_n) \searrow I$. Ademas por (1.19) x_n está acotado (si A está acotado no hace falta la hipótesis (1.19)), con lo que por ser E reflexivo, $\exists\ x_{n_k} \rightharpoonup x \in E$ (convergencia débil).

Por otro lado φ es convexa y s.c.i. fuertemente, lo cual implica (obviamente) que φ es s.c.i. para la topología débil y por tanto $\varphi(x) \leq \underline{\lim} \varphi(x_{n_k}) = I$. Además $x \in A$ (ya que A es cerrado para la topología fuerte y convexo, lo que implica que A es cerrado para la topología débil), y por tanto $\varphi(x) = I$. $\blacksquare$

Teorema 1.6 *En las condiciones del teorema (1.4) el elemento mínimo $u \in \mathcal{U}_{ad}$ se caracteriza por*

$$\pi(u, v-u) \geq L(v-u),\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad \square$$

Demostración : Ver capítulo 1 de [28]. $\blacksquare$

Teorema 1.7 *Suponiendo que $v \to J(v)$ es estrictamente convexa, diferenciable y satisface (1.19) con $\varphi = J$ (esta hipótesis no es necesaria si $\mathcal{U}_{ad}$ es acotado), entonces el elemento u, que minimiza el funcional J está caracterizado por:*

(1.20) $$J'(u)(v-u) \geq 0\ \forall\ v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad \square$$

Demostración : Ver capítulo 1 de [28]. $\blacksquare$

Teorema 1.8 *En las condiciones anteriores (1.20) es equivalente a:*

(1.21) $$J'(v)(v-u) \geq 0\ \forall\ v \in \mathcal{U}_{ad}. \quad \square$$

Demostración :

1)(1.20) $\Rightarrow$ (1.21). Si en (1.21) ponemos $v = (1-\theta)\omega + \theta u$, donde ω es cualquier elemento de $\mathcal{U}_{ad}$, y $\theta \in]0,1[$, queda:

$$(1-\theta) J'((1-\theta)\omega + \theta u)(\omega - u) \geq 0,$$

de donde

$$J'((1-\theta)\omega + \theta u)(\omega - u) \geq 0.$$

Finalmente si $\theta \to 1$ obtenemos (1.21).

2)(1.21) $\Rightarrow$ (1.20). Por convexidad $\forall\ \theta \in]0,1[$:

$$J(v) - J(u) \geq \frac{1}{\theta}[J((1-\theta)u + \theta v) - J(u)] \qquad \forall\ v, u$$

y haciendo $\theta \to 0$ se obtiene:

$$J(v) - J(u) \geq J'(u)(v-u). \tag{1.22}$$

Ahora si intercambiamos v y u en (1.22), tenemos

$$J(u) - J(v) \geq J'(v)(u-v). \tag{1.23}$$

Finalmente combinando (1.22) y (1.23) queda

$$(J'(v) - J'(u))(v-u) \geq 0 \qquad \forall\ u, v$$

con lo que $J'(v)(v-u) \geq J'(u)(v-u)$, y se obtiene (1.20). ■

Observación 1.9 *Es claro que en el caso $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$, la caracterización anterior queda:*

$$J'(u)(\omega) = 0 \qquad \forall\ \omega\ \in \mathcal{U}.$$

1.3.2 Presentación del problema de control óptimo y propiedades.

En esta sección llamaremos *"espacio de controles"* al espacio de Hilbert $\mathcal{U}$. Supondremos dado un operador:

$$B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; L^2(0,T;V')).$$

Fijados $y_0 \in H$ y $f \in L^2(0,T;V')$, [bajo las hipótesis (1.1), (1.2) y (1.3)], llamaremos $y(v)$, o *"estado del sistema"* a la solución de

$$\frac{\partial y(v)}{\partial t} + A(t)y(v) = f + Bv \tag{1.24}$$

$$y(v)\mid_{t=0} = y_0 \tag{1.25}$$

$$y(v) \in L^2(0,T;V). \tag{1.26}$$

Observese que la existencia y unicidad de $y(v)$ vienen dadas por el Teorema 1.2. Notaremos $y(v)(t) = y(t;v)$.

Llamaremos *"observación"* a $z(v) = C(y(v))$, donde $C \in \mathcal{L}(W^{1,2}(0,T;V);\mathcal{H})$, con $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert. La "función coste" se supone dada por

$$J(v) = \| Cy(v) - z_d \|_{\mathcal{H}}^2 + (Nu, v)_{\mathcal{U}},$$

donde z_d es un elemento dado de $\mathcal{H}$ y $N \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{U})$ es hermítica (es decir, su traspuesta coincide con su conjugada) y cumple:

$$(Nu, u)_{\mathcal{U}} \geq \nu \| u \|_{\mathcal{U}}^2,\ \nu > 0 \tag{1.27}$$

Dado $\mathcal{U}_{ad}$ subconjunto cerrado y convexo de $\mathcal{U}$ (conjunto de controles admisibles), los problemas de control óptimo pretenden buscar

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v). \tag{1.28}$$

Notese que por (1.24), $v \to y(v)$ es un campo afín de $\mathcal{U} \to W^{1,2}(0,T;V)$ y continuo debido al Teorema 1.2.

Se tiene

Teorema 1.10 *Supongamos (1.1), (1.2), (1.3), (1.27) y que el estado del sistema es dado por (1.24), (1.25) y (1.26). Entonces existe un único $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v). \qquad \square$$

Demostración: Escribimos $J(u)$ de la siguiente manera

$$J(u) = \| C(y(u) - y(0)) + Cy(0) - z_d \|^2_{\mathcal{H}} + (Nu, u)_{\mathcal{U}}$$

Tomando:

$$\begin{aligned} \pi(u,v) &= (C(y(u) - y(0)), C(y(v) - y(0)))_{\mathcal{H}} + (Nu, v) \\ L(v) &= (z_d - Cy(0), C(y(v) - y(0)))_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

como $v \to y(v)$ es un campo afín continuo se concluye que $L(v)$ es una forma lineal y continua sobre $\mathcal{U}$ y $\pi(u,v)$ es una forma bilineal, continua y simétrica sobre $\mathcal{U}$, con $\pi(v,v) \geq \nu \| v \|^2_{\mathcal{U}}$ $\forall\, v \in \mathcal{U}$ ya que $\| C(y(v) - y(0)) \|^2_{\mathcal{H}} \geq 0$, y se cumple (1.27). Finalmente

$$J(v) = \pi(v,v) - 2L(v) + \| z_d - Cy(0) \|^2_{\mathcal{H}},$$

con lo que obtener (1.28) es lo mismo que hallar

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} (\pi(v,v) - 2L(v)),$$

y se sabe (vease el teorema (1.4)) que en las condiciones de $\pi(.,.)$ y $L(v)$ anteriores existe un único $u \in \mathcal{U}_{ad}$, que alcanza este ínfimo y por tanto es el único $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v). \qquad \blacksquare$$

Definición 1.11 *El elemento $u \in \mathcal{U}_{ad}$ para el cual $J(v)$ alcanza su mínimo es llamado "control óptimo".*

Si en el problema a considerar $N = 0$, solo podemos afirmar que $\pi(u,v) \geq 0$, y tenemos el sigiente resultado:

Teorema 1.12 *Supongamos (1.1), (1.2), (1.3) con $N = 0$. Si $\mathcal{U}_{ad}$ está acotado, entonces existe un subconjunto no vacio X de $\mathcal{U}_{ad}$ tal que*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) \qquad \forall\, u \in X. \qquad \square$$

Demostración : (Ver [28]). $\blacksquare$

Definición 1.13 *Al conjunto X se le llama conjunto de controles óptimos.*

1.3.3 Desigualdades caracterizando el control óptimo.

Utilizando lo visto en el Teorema 1.7, un control $u \in \mathcal{U}_{ad}$ es óptimo si y solo si

$$J'(u)(v-u) \geq 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

o lo que es lo mismo:

$$(Cy(u) - z_d, C(y(v) - y(u)))_{\mathcal{H}} + (Nu, v - u)_{\mathcal{U}} \geq 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Si notamos:
$\Lambda =$ isomorfismo canónico de $\mathcal{H}$ sobre $\mathcal{H}'$
$\Lambda_{\mathcal{U}} =$ isomorfismo canónico de $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{U}'$
la fórmula anterior se reduce a

$$(1.29)\ (C^*\Lambda(Cy(u)-z_d), y(v)-y(u))_{(W^{1,2}(0,T;V))'\times W^{1,2}(0,T;V)} + (Nu, v-u)_{\mathcal{U}} \geq 0\ \forall\ v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Interpretaremos esta caracterización para el caso

$$Cy(v) = Dy(T;v),\ \ D \in \mathcal{L}(H;H),$$

con lo que la función coste resulta

$$J(v) = \mid Dy(T;v) - z_d \mid^2 + (Nv, u)_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}. \tag{1.30}$$

La condición de control óptimo (1.29) es equivalente a

$$(Dy(T;u) - z_d, Dy(T;v) - Dy(T;u))_{H\times H} + (Nu, v-u)_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \geq 0\ \forall\ v \in \mathcal{U}_{ad}. \tag{1.31}$$

A continuación introducimos el estado adjunto $p = p(v)$ dado como la solución de:

$$-\frac{\partial}{\partial t}p + A^*(t)p = 0 \text{ en } (0,T), \tag{1.32}$$

con A^* el operador adjunto de A,

$$\begin{array}{rcl} p(T;v) & = & D^*(Dy(T;v) - z_d) \\ p & \in & L^2(0,T;V). \end{array}$$

(Para ver que $p(v)$ está bien definido, basta aplicar el Teorema 1.2 cambiando t por $T-t$).

Si en las anteriores ecuaciones tomamos $v = u$ y multiplicamos escalarmente ambos lados de (1.32) por $y(v) - y(u)$ e integramos sobre el intervalo $(0,T)$, nos queda:

$$(Dy(T;u) - z_d; Dy(T;v) - Dy(T;u))_{H\times H} = \int_0^T (p(u), B(v-u))dt,$$

ya que

$$\int_0^T (-\frac{d}{dt}p, y(v) - y(u))dt = \int_0^T (p, \frac{d}{dt}(y(v) - y(u))dt - (D^*(Dy(T;u)) - z_d, y(T;v) - y(T;u)).$$

De este modo (1.31) es equivalente a:

$$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p + Nu, v-u)_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \geq 0\ \forall\ v \in \mathcal{U}_{ad},$$

con lo que tenemos probado el siguiente

Teorema 1.14 *Bajo las condiciones (1.1), (1.2), (1.3),(1.27) y J(v) dado por (1.30), el control óptimo viene determinado por*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial}{\partial t}y(u) + A(t)y(u) & = & f + Bu \\ y(0;u) & = & y_0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\dfrac{\partial}{\partial t}p + A^*(t)p & = & 0 \\ p(T;u) & = & D^*(Dy(T;u) - z_d) \end{array} \right.$$

(1.33) $$(\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p(u) + Nu, v - u)_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \geq 0 \;\forall\; v \in \mathcal{U}_{ad},\; u \in \mathcal{U}_{ad},$$

junto con

$$\begin{array}{rcl} y(u) & \in & L^2(0,T;V) \\ p & \in & L^2(0,T;V). \quad \square \end{array}$$

Observación 1.15 En el caso $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$, (1.33) se reduce a

$$u = -N^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1} B^* p,$$

con lo que el sistema queda:

$$\left. \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial}{\partial t}y + A(t)y + BN^{-1}\Lambda_{\mathcal{U}}^{-1}B^*p & = & f \\ -\dfrac{\partial}{\partial t}p + A^*(t)p & = & 0 \\ y(0) & = & 0 \\ p(T) & = & D^*(Dy(T) - z_d). \end{array} \right\}$$

Capítulo 2

CONTROLABILIDAD APROXIMADA DE PROBLEMAS PARABOLICOS LINEALES.

2.1 Controlabilidad aproximada: Propiedades de signo.

Definición 2.1 *El sistema cuyo estado es definido por (1.24), (1.25) y (1.26), se dice que es "$\mathcal{H}$-controlable aproximadamente" (respectivamente "$\mathcal{H}$-controlable exáctamente"), si al variar el control v, la observación $Cy(v)$ genera un conjunto afín denso en el espacio de las observaciones $\mathcal{H}$ (respectivamente si al variar v en el espacio de controles, $Cy(v)$ recorre todo $\mathcal{H}$). Es decir, dado $z_d \in \mathcal{H}$ $\exists$ $v_n \in \mathcal{H}$ (resp. $v \in \mathcal{H}$) tal que $Cy(v_n) - Cy(0) \to z_d$ en $\mathcal{H}$ (resp. $Cy(v) = z_d$).*

Veamos mediante varios ejemplos importantes como el estudio de controlabilidad se puede reducir al problema de la unicidad para le ecuación retrógrada en el tiempo.

Ejemplo 2.2 .

Supongamos (1.14), $V = H^1(\Omega)$, $\mathcal{U} = L^2(\Sigma), \mathcal{H} = L^2(\Omega)$, $A(t)$ como en el ejemplo de la sección (1.2.4), y el estado $y(v)$ dado por la solución de:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(y(v),\psi) + a(t; y(v), \psi) = (f(t),\psi)_{L^2(\Omega)} + (v(t), \psi \mid_\Gamma)_{L^2(\Gamma)} \\ \forall\ \psi \in H^1(\Omega)\ (f \in L^2(Q)) \end{cases}$$

con la condición inicial

$$y(0,x) = y_0 \text{ en } \Omega,\ y_0 \in L^2(\Omega).$$

Así, si $y_0 \equiv 0$ y $f \equiv 0$, $y(v)$ es la solución de:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y(v) + Ay(v) &= 0 \text{ en } Q \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu_A}y(v) &= v \text{ en } \Sigma,\ v \in \mathcal{U} = L^2(\Sigma) \\ y(0,x;v) &= 0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Supongamos que la observación es dada por

$$Cy(v) = y(T,x;v).$$

Veamos a continuación que el sistema es controlable aproximadamente.

Sea $\psi \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega y(T,x;v)\psi(x)dx = 0 \ \forall\ v \in \mathcal{U} \tag{2.1}$$

y ξ la solución de:

$$\left\{\begin{array}{lll} -\dfrac{\partial}{\partial t}\xi + A^*\xi & = 0 & \text{en } Q \\ \dfrac{\partial}{\partial \nu_{A^*}}\xi & = 0 & \text{en } \Sigma \\ \xi(T,x) & = \xi(x) & \text{en } \Omega. \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Se tiene que

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \displaystyle\int_Q (-\frac{\partial}{\partial t}\xi + A^*\xi)y(v)dxdt = \int_Q -\frac{\partial}{\partial t}\xi y(v)dxdt + \int_Q A*\xi y(v)dxdt \\ & = & \displaystyle\int_\Omega \left[\int_T^0 (-\frac{\partial}{\partial t}\xi y(v)dt\right] dx + \int_0^T - \left[\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_{A^*}}\xi y(v)d\Gamma + \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}^* \frac{\partial}{\partial x_j}\xi \frac{\partial}{\partial x_i} y(v)dx\right] dt \\ & = & \displaystyle -\int_\Omega (\xi(T,x)y(T,x;v))dx + \int_Q \xi \frac{\partial}{\partial t} y(v)dxdt + \int_0^T \left[\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} y(v)\frac{\partial}{\partial x_j}\xi dx\right] dt \\ & = & \displaystyle -\int_\Omega (\xi(T,x)y(T,x;v))dx + \int_Q \xi \frac{\partial}{\partial t} y(v)dxdt + \int_0^T \left[\int_\Omega Ay(v)\xi dx + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial \nu_A} y(v)\xi d\Gamma\right] dt \\ & = & \displaystyle -\int_\Omega (\xi(T,x)y(T,x;v))dx + \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial \nu_A} y(v)\xi d\Sigma + \int_Q (\frac{d}{dt}y(v) + Ay(v))\xi dxdt \\ & = & \displaystyle -\int_\Omega \psi(x)y(T,x;v) + \int_\Sigma \xi v d\Sigma, \end{array}$$

con lo que por (2.1)

$$\int_\Sigma \xi v d\Sigma = 0 \ \forall\ v \in \mathcal{U},$$

de donde $\xi = 0$ en Σ, es decir la condición de contorno de ξ es cero, con lo que por unicidad de soluciones de (2.2), $\xi \equiv 0$ y por tanto $\psi \equiv 0$.

Ejemplo 2.3 Un caso de más interes en las aplicaciones es el siguiente:

Sea $\Omega \subset I\!R^{\,n}$ y sea $\omega \subset \Omega$ un abierto sobre el que se ejercerá el "control". Se supone que $v \in \mathcal{U}_{ad} \subset (L^2((0,T)\times\omega)$ (conjunto de controles admisibles). Si χ_ω designa la función característica de ω, el problema que vamos a abordar es

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = v\chi_\omega \text{ en } Q \tag{2.3}$$

$$y(0) = 0 \quad \text{en } \Omega \tag{2.4}$$

$$y = 0 \quad \text{en } \Sigma. \tag{2.5}$$

A la solución de este problema la denotaremos por $y(v)$. Como en el ejemplo anterior se trata de probar que $Cy(v) = y(T,.;v)$ es denso en $L^2(\Omega)$.

Sea $f \in L^2(\Omega)$ tal que

$$(y(T,.;v),f) = 0 \ \forall\ v \in L^2((0,T)\times\omega). \tag{2.6}$$

Definimos ψ como solución de:

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} - \Delta\psi = 0 \text{ en } (0,T)\times\Omega \tag{2.7}$$

$$\psi(T) = f \text{ en } \Omega \tag{2.8}$$

$$\psi = 0 \text{ en } \Sigma.$$

Si multiplicamos (2.7) por $y(v) = y$ queda:

$$-(y(T), f) + \int_Q \psi(\frac{dy}{dt} - \Delta y)dxdt = 0,$$

y aplicando (2.6) y (2.3)

$$\int_Q \psi v \chi_\omega dxdt = 0 \ \forall \ v \in L^2((0,T)\times\omega),$$

de donde

$$\psi = 0 \text{ sobre } (0,T)\times\omega. \tag{2.9}$$

La propiedad de continuación única (se deduce del teorema de Holmagren, ver S.Mizohata [32] o J.C. Saut y B. Scheurer [36]) asegura que

$$\left.\begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } (0,T)\times\omega \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi \in L^p(Q) & \end{cases}\right\} \Rightarrow \varphi = 0 \text{ en } Q.$$

Esto junto con (2.8) y (2.9), implica que

$$\psi = 0 \text{ en } Q,$$

y por tanto $f \equiv 0$ c.q.d.

$\blacksquare$

Observación 2.4 .

Un aspecto interesante es obtener subconjuntos del espacio ambiente para los que hay controlabilidad exacta (aunque en el espacio de estados solo haya controlabilidad aproximada). Nos centraremos en el siguiente ejemplo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) - \Delta u(t,x) = 0 & , \ x\in\Omega, \ t\in(0,\infty) \\ Bu(t,x) = f(t,x) & , \ x\in\partial\Omega, \ t\in(0,\infty) \\ u(0,x) = u_0(x) & , \ x\in\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

donde $u_0 \in L^2(\Omega)$ (Ω es abierto acotado y regular) y $B = a\frac{\partial}{\partial\nu} + 1$ (ν es la normal exterior a $\partial\Omega$). Denotemos por

$$E(T, L^\infty, u_0) = \{u(T,\cdot) : \exists \ f \in L^\infty((0,\infty)\times\partial\Omega) \text{ con } u(t,x) \text{ solución de } (2.10)\}$$

Se puede probar que si $f \in L^\infty((0,\infty)\times\partial\Omega)$, (2.10) tiene una solución débil $u(t,x)$ con $u(t,\cdot) \in L^2(\Omega)$ $\forall t \geq 0$, $E(T, L^\infty, u_0)$ es denso en $L^2(\Omega)$ (ver [31]), $0 \in E(T, L^\infty, u_0)$ (propiedad conocida como controlabilidad nula y probada por ejemplo en [38]), $E(T, L^\infty, u_0)$ es de hecho independiente de T y u_0 (ver [38]), con lo que podemos denotarlo de forma abreviada por E.

Al cumplirse que $0 \in E$ se obtiene que $S \subset E$, donde S denota el conjunto de las soluciones débiles de

$$\begin{aligned} \Delta w(x) &= 0, \ x \in \Omega \\ Bw(x) &= g(x), \ x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

con $g(\cdot) \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Esto se debe a que si $f \in L^\infty((0,\infty) \times \partial\Omega)$ es tal que la solución $u(t,x)$ correspondiente a (2.10) nos permite alcanzar el estado nulo, entonces $v(t,x) = u(t,x) + w(x)$ es solución de (2.10) para el control $f + g \in L^\infty((0,\infty) \times \partial\Omega)$, y en tiempo T alcanza el estado

$$v(T,x) = 0 + w(x) = w(x)$$

Por tanto ya tenemos un subconjunto S controlable exáctamente. Mas todavía, en [35] se prueba que si $v(x) \in E,\ g(x) \in L^\infty(\partial\Omega)$ y $w(x)$ es solución débil de

$$\begin{aligned} \Delta w(x) = v(x), &\quad x \in \Omega \\ Bw(x) = g(x), &\quad x \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.11}$$

entonces $w(x) \in E$.

De este modo tenemos otro subconjunto

$$S' = \{w(x) \text{ solución de } (2.11)\} (\supset S)$$

exactamente controlable.

Como consecuencia de este resultado, el conjunto de polinomios $p(x_1, ..., x_k)$ tambien está contenido en E. Para probar esto último basta actuar por indución sobre el grado de los polinomios, para ver que son casos particulares de soluciones de (2.11) y por tanto pertenecen al conjunto S'.

El conjunto exactamente controlable S' se puede ampliar todavía más a conjuntos mayores, explicitados de manera parecida a S y S', como puede verse por ejemplo en [37].

Observación 2.5 Otro tipo interesante de controlabilidad es lo que podriamos llamar "controlabilidad restringida", que trataría de alcanzar (de forma aproximada o exacta) conjuntos de estados (que no tienen por qué constituir un espacio de Banach), mediante conjuntos de controles adecuados.

Un caso particularmente interesante es cuando se pretenden alcanzar estados positivos mediante controles positivos. Veamos a continuación un par de resultados de este tipo.

Proposición 2.6 *(Díaz,J.I.-Henry,J.-Ramos,A.M. [13])*

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado y regular; X un subconjunto denso en $L^2_+(Q) = \{u \in L^2(Q) :\ u \geq 0\}$. Para cada $v \in X$ denotamos por $y(v)$ a la solución de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} y - \Delta y = v & \text{en } Q \\ y(t,x) = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(\cdot, 0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces para todo $T > 0$, el conjunto $F = \{y(T,v) :\ v \in X\}$ es denso en $L^2_+(\Omega)$. $\square$

Demostración:

Supongamos que existe $y_d \in L^2_+(\Omega)$ tal que $y_d \notin \overline{F}$. Debido a que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} L^2(Q) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ \omega & \longrightarrow & y(T,\omega) \end{array}$$

es continua, se tiene que $y(T, L^2_+(Q)) \subset \overline{F}$, cerrado y convexo.

Por la $2^{\underline{a}}$ forma geométrica del teorema de Hahn-Banach (vease Brezis,H. [4]), existe $g \in L^2(\Omega)$ y $\alpha \in I\!R$ tal que

$$\int_\Omega y(T,v) g dx < \alpha < \int_\Omega y_d g, \ \forall\ v \in L^2_+(Q).$$

Ahora bien, dado $v \in L^2_+(Q)$ se tiene que $\lambda v \in L^2_+(Q)$ para todo $\lambda \in I\!R_+$, y por la linealidad, $y(T, \lambda v) = \lambda y(T, v)$. De este modo

$$\int_\Omega y(T,v) g \leq 0 < \alpha < \int_\Omega y_d g, \ \forall\ v \in L^2_+(Q). \tag{2.12}$$

Sea ahora $\psi \in L^2(Q)$ la solución de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\psi - \Delta\psi = 0 & \text{en } Q \\ \psi(T) = g & \text{en } \Omega \\ \psi = 0 & \text{en } \Sigma. \end{cases}$$

Multiplicando por $y(v)$ se obtiene

$$(y(T,v), g) = \int_Q \psi v \leq 0, \ \forall\ v \in L^2_+(Q),$$

deduciendose que $\psi \leq 0$. Por tanto $g \leq 0$, lo que implica

$$\int_\Omega y_d g \leq 0,$$

lo cual está en contradicción con (2.12) y prueba que $y_d \in \overline{F}$. ■

Otro resultado en esta dirección es el siguiente

Proposición 2.7 *(Díaz,J.I. [8]) Se considera el problema*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f & en\ Q \\ y = v & en\ \Sigma \\ y(0,x) = y_0 & en\ \Omega, \end{cases} \tag{2.13}$$

con $v \in X = C^\infty_+(\Sigma)$. *Dado el conjunto*

$$E^L(T;X) = \{y(T,\cdot : v) :\ y \text{ es solución de } (2.13),\ v \in X\},$$

entonces, $E^L(T;X)$ *es denso en* $\{y(T,\cdot : 0)\} + L^2_+(\Omega)$. □

Demostración:

Basta probar que

$$F = \{y(T,\cdot;v) - y(T,\cdot;0) : \ y \text{ es solución de } (2.13), \ v \in X\}$$

es denso en $L^2_+(\Omega)$. Ahora bien,

$$F = \{z(T,\cdot;v) : \ v \in X, \ z \text{ sastisface } z_t - \Delta z = 0 \text{ en } Q, \ z = v \text{ en } \Sigma \text{ y } z(0,\cdot;v) = 0 \text{ en } \Omega\}.$$

Supongamos que existe $g \in L^2_+(\Omega)$, $g \not\equiv 0$, tal que $g \notin \overline{F}$ (que es un conjunto cerrado y convexo). Por el teorema de la proyección existe un único $u \in \overline{F}$ tal que

$$(g-u, p-u) \leq 0 \ \forall \ p \in \overline{F}.$$

Ahora, como $\overline{F}$ es un cono convexo y cerrado, podemos tomar $p = e+u$ y $p = 0$, respectivamente, y se tiene:

$$(g-u, e) \leq 0 \ \forall \ e \in \overline{F} \tag{2.14}$$

y

$$(g-u, u) = 0. \tag{2.15}$$

Consideremos a continuación, $q \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ la solución del problema

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial q}{\partial t} - \Delta q = 0 & \text{en } Q \\ q = 0 & \text{en } \Sigma \\ q(T,x) = g(x) - u(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

Si multiplicamos la ecuación de q por las z de F, obtenemos:

$$\int_\Sigma (-\frac{\partial q}{\partial n}) v = \int_\Omega (g(x) - u(x)) z(T), \ \forall \ z \in F,$$

con lo que utilizando (2.14) y (2.15) se tiene que

$$\int_\Sigma (-\frac{\partial q}{\partial n}) v \leq 0 \ \forall v \in X \ \text{y} \ \int_\Sigma (-\frac{\partial q}{\partial n}) v^0 = 0, \tag{2.16}$$

siendo $v^0 \in X$ si $u = z(T,\cdot;v^0) \in F$, o en cualquier caso $v^0 \in L^2_+(\Omega)$ si $u \in \overline{F}$. Ahora, como X es denso en $L^2_+(\Omega)$, utilizando (2.16) se concluye que $-\frac{\partial q}{\partial n} v^0 = 0$ en Σ.

Por otro lado, podemos suponer que $g > o$ en un entorno de $\partial\Omega$, pues en caso contrario, aplicando el principio fuerte del máximo (vease Protter,M.-Weinberger,H. [34] tendriamos $q < 0$, que con la condición $g = 0$ en Σ implica $\frac{\partial q}{\partial n} > 0$, y por (2.16), $v^0 = 0$, concluyendose por los resultados ya citados de continuación única (vease Mizohata,S. [32]) que $u \equiv 0$, lo cual es absurdo.

Por tanto, con $g > 0$, utilizando la desigualdad (2.14), se deduce que existe $\delta > 0$ tal que $v^0 > 0$ en $\Sigma^T_\delta \equiv (T-\delta, T) \times \partial\Omega$. De este modo, por (2.16), $\frac{\partial q}{\partial n} = 0$ en Σ^T_δ, y empleando de nuevo los resultados de continuación única, se concluye que $q \equiv u$ en $[T-\delta, T] \times \Omega$, que contradicce la suposición de $g \neq u$.

∎

En las tres siguientes secciones, veremos demostraciones constructivas de la controlabilidad aproximada.

2.2 Una demostración constructiva de la controlabilidad aproximada de la ecuación lineal del calor, con control local sobre el abierto.

La densidad probada en el Ejemplo 2.3, implica que para cualquier $z_d \in L^2(\Omega)$, existe una sucesión $\{v_k\} \subset \mathcal{H} = L^2((0,T) \times \omega)$, tal que

$$y(T; v_k) \to z_d \text{ en } L^2(\Omega).$$

Siguiendo a Lions,J.L. [29], veremos que es posible construir dicha sucesión.

Si $y(v)$ es la solución de (2.3),(2.4) y (2.5), se define el funcional

$$J_k(v) = \frac{1}{2} \parallel v \parallel^2_{L^2(\omega\times(0,T))} + \frac{k}{2} \parallel y(T;v) - z_d \parallel^2_{L^2(\Omega)} \quad (k > 0).$$

Se considera a continuación

$$\inf_{v \in L^2((0,T)\times\omega)} J_k(v).$$

Al ser J convexo, continuo y coercitivo (en el sentido de que es no acotado sobre los conjuntos no acotados) sobre un espacio reflexivo, el ínfimo anterior se alcanza (vease p.e. el Corolario $III.20$ de [4]) sobre un único elemento v_k. Si llamamos $y_k = y(v_k)$, se tiene

$$\text{(2.17)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y_k}{\partial t} - \Delta y_k &=& v\chi_\omega & \text{en } Q \\ y_k(0) &=& 0 & \text{en } \Omega \\ y_k &=& 0 & \text{en } \Sigma. \end{array} \right.$$

Se introduce también p_k como solución de

$$\text{(2.18)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial p_k}{\partial t} - \Delta p_k &=& 0 & \text{en } Q \\ p_k(T) &=& y_k(T) - z_d & \text{en } \Omega \\ p_k &=& 0 & \text{sobre } \Sigma. \end{array} \right.$$

Por ser v_k el mínimo de J_k, se obtiene (derivando en J_k)

$$\text{(2.19)} \qquad \int_{(0,T)\times\omega} v_k v dxdt + k(y_k(T) - z_d, y(T;v)) = 0 \ \forall \ v \in L^2((0,T)\times\omega)$$

Ahora bien, utilizando (2.17) y (2.18) se obtiene

$$\begin{array}{rcl} (y_k(T) - z_d, y(T;v)) &=& (p_k(T), y(T;v)) \\ &=& -(p_k(0), y(0,v)) - \displaystyle\int_{(0,T)\times\Omega} (p_k(t), \frac{\partial}{\partial t} y_k(t)(t;v) - \Delta y_k(t;v)) dxdt \\ &=& - \displaystyle\int_{(0,T)\times\Omega} (p_k, v\chi_\omega), \end{array}$$

con lo que (2.19) queda:

$$\int_{(0,T)\times\Omega} (v_k + kp_k) v\chi_\omega dxdt = 0 \ \forall \ v \in L^2((0,T)\times\omega),$$

y por tanto

$$v_k\chi_\omega + kp_k\chi_\omega = 0 \text{ sobre } (0,T)\times\omega.$$

De este modo el sistema (2.17), (2.18) se transforma en:

$$\text{(2.20)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y_k}{\partial t} - \Delta y_k + kp_k\chi_\omega &= 0 & \text{sobre } (0,T)\times\Omega \\ \dfrac{\partial p_k}{\partial t} - \Delta p_k &= 0 & \text{sobre } (0,T)\times\Omega \\ y_k(0) &= 0 & \text{en } \Omega \\ p_k(T) &= y_k(T) - z_d & \text{en } \Omega \\ y_k = p_k &= 0 & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

La existencia de la solución $\{y_k, p_k\}$ del sistema (2.20) puede mostrarse por técnicas standar (Lions,J.L. [28]). Ademas se verifica (según veremos más tarde)

$$\text{(2.21)}\qquad y_k(T) \to z_d \text{ en } L^2(\Omega) \text{ cuando } k\to\infty,$$

y por tanto resuelve nuestro problema con $v_k = -kp_k\chi_\omega$.

Demostremos por tanto (2.21): Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por la densidad ya probada, sabemos que existe $\omega_0 \in L^2(\omega\times(0,T))$, tal que

$$\| y(T;\omega_0) - z_d \| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

y como $J_k(v_k) \leq J_k(\omega_0)$, se tiene en particular que

$$k \| y_k(T) - z_d \|^2 \leq \| \omega_0 \|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} + \| y(T;\omega_0) - z_d \|^2,$$

de donde se obtiene

$$\| y_k(T) - z_d \|^2 \leq \frac{\| \omega_0 \|^2_{L^2(\omega\times(0,T))}}{k} + \frac{\varepsilon^2}{4} \leq \varepsilon^2 \text{ para k suficientemente grande,}$$

quedando probado (2.21).

2.3 Caso de la ecuación lineal con potencial.

En lo sucesivo notaremos $\mid \theta \mid_p$ a la norma de θ en $L^p(\Omega)$ (si $\theta \in L^p(\Omega)$), p' el exponente conjugado de p (es decir $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$) y $(f,g) = \int_Q f(t,x)g(t,x)dxdt$ (si esto tiene sentido).

El problema que se pretende resolver es el siguiente: Dados $a \in L^\infty(Q)$, $(y_0, y_d) \in (L^p(\Omega))^2$ y $\alpha > 0$, se busca $h \in L^p(Q)$ tal que la solución de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + a(t,x)y &= h\chi_\omega & \text{en } Q \\ y &= 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) &= 0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

cumpla $y(T) \in B(y_d, \alpha) \equiv \{$bola cerrada en $L^p(\Omega)$, centrada en y_d y de radio $\alpha\}$.

Siguiendo a Fabré,C.-Puel,J.P.-Zuazua,E. [15] (tal y como haremos en toda esta seeción), introducimos el funcional

$$J(\varphi^0; a, y_d) = \frac{1}{2}\left(\int_q \mid \varphi(t,x) \mid dxdt\right)^2 + \alpha \mid \varphi^0 \mid_{p'} - \int_\Omega y_d\varphi^0 dx,$$

donde $q = (0,T) \times \omega$, $\varphi^0 \in L^{p'}(\Omega)$ y φ es la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta\varphi + a\varphi & = & 0 & \text{en } Q \\ \varphi & = & 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(T) & = & \varphi^0 & \text{en } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.22}$$

Necesitaremos algunos resultados técnicos, que se exponen a continuación.

Proposición 2.8 *Sea $a = a(t,x) \in L^\infty(Q)$. Existe una constante $C > 0$ tal que para cada $k \in L^p(Q)$ y $\omega^0 \in L^p(\Omega)$, la solución ω de*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial t}\omega - \Delta\omega + a(t,x)\omega = k \ \ en \ Q \\ \omega = 0 \ \ en \ \Sigma \\ \omega(0) = \omega^0 \ \ en \ \Omega \end{array} \right.$$

satisface

$$\| \omega \|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} \leq C \left(| \omega^0 |_p + \| k \|_{L^p(Q)} \right) \quad \square \tag{2.23}$$

Demostración: Ver el teorema 9.1 en la pag. 341 de [25] y pags. 226-228 de [33]. ■

Proposición 2.9 *En las condiciones de la proposición (2.8), si $\omega^0 = 0$, entonces $\omega \in X^p(0,T)$ y existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\| \omega \|_{X^p(0,T)} \leq C \| k \|_{L^p(Q)}, \tag{2.24}$$

donde

$$X^p(0,T) = L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,T; L^p(\Omega)),$$

que es un espacio de Banach dotado con la norma

$$\| \cdot \|_{X^p(0,T)} = \| \cdot \|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \| \cdot \|_{W^{1,p}(0,T;L^p(\Omega))} \cdot \quad \square$$

Demostración: Ver paginas 341-342 de [25]. ■

Proposición 2.10 *Para todo $\alpha > 0$, $y_d \in L^p(\Omega)$ y $a \in L^\infty(Q)$, el funcional $J(.;a,y_d) : L^{p'}(\Omega) \to I\!R$ es estríctamente convexo y verifica*

$$\liminf_{|\varphi^0|_{p'} \to \infty} \frac{J(\varphi^0; a, y_d)}{| \varphi^0 |_{p'}} \geq \alpha. \tag{2.25}$$

Ademas $J(.;a,y_d)$ alcanza su mínimo en un único punto $\widehat{\varphi}^0$ en $L^{p'}(\Omega)$ verificando

$$\widehat{\varphi}^0 = 0 \Leftrightarrow | y_d |_p \leq \alpha. \tag{2.26}$$

Finalmente, si M es el operador

$$\begin{array}{rccc} M: & L^p(\Omega) \times L^\infty(Q) & \to & L^{p'}(Q) \\ & (y_d, a) & \longrightarrow & \widehat{\varphi}^0, \end{array}$$

dados K compacto de $L^p(\Omega)$ y B acotado de $L^\infty(Q)$, entonces $M(K \times B)$ es un subconjunto acotado de $L^{p'}(\Omega)$. $\square$

Demostración: Suponiendo que no se cumple (2.25), existirá una sucesión φ_n^0 en $L^{p'}(\Omega)$ tal que

$$\mid \varphi_n^0 \mid_{p'} \to +\infty \text{ y } \liminf_{n\to+\infty} \frac{J(\varphi_n^0; a, y_d)}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}} < \alpha,$$

y por tanto([1])

$$\lim_{n\to+\infty} \int_q \frac{\mid \varphi_n(t,x) \mid}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}} dxdt = 0, \tag{2.27}$$

pues en caso contrario

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty} \frac{J(\varphi_n^0; a, y_d)}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}} &= \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \mid \varphi_n^0 \mid_{p'} \left(\int_q \frac{\mid \varphi_n(t,x) \mid}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}} dxdt \right)^2 + \alpha - \int_\Omega y_d \frac{\varphi_n^0}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}} \right) \\
&\geq \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} \mid \varphi_n^0 \mid_{p'} \left(\int_q \frac{\mid \varphi_n(t,x) \mid}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}} dxdt \right)^2 + \alpha - \mid y_d \mid_p \right) = +\infty.
\end{aligned}$$

Por tanto se cumple (2.27). Ademas $\dfrac{\varphi_n^0}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}}$ tiene norma unidad, con lo que podemos extraer una subsucesión convergente en $L^{p'}(\Omega)$ a un elemento ψ^0 de $L^{p'}(\Omega)$, y utilizando (2.23) y el paso al límite en (2.22) con dato final $\dfrac{\varphi_n^0}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}}$, se obtiene que las soluciones de estos problemas convergen débilmente a ψ, solución de (2.22), con dato final ψ^0. Entonces por (2.27) $\psi^0 = 0$.

Si esto lo unimos a que

$$J(\varphi_n^0; a, y_d) \geq \mid \varphi_n^0 \mid_{p'} \left(\alpha - \int_\Omega y_d \frac{\varphi_n^0}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}} dx \right),$$

tenemos que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{J(\varphi_n^0; a, y_d)}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}} \geq \alpha,$$

lo que contradice la hipótesis supuesta y prueba (2.25).

Por otro lado $J(.; a, y_d)$ es un funcional convexo y continuo sobre el espacio reflexivo $L^{p'}(\Omega)$ y

$$\lim_{|\varphi_n^0|_{p'} \to +\infty} J(\varphi_n^0; a, y_d) = +\infty,$$

con lo que $J(.; a, y_d)$ alcanza su mínimo en un único punto $\widehat{\varphi}^0$ en $L^{p'}(\Omega)$ (vease p.e. el Corolario III.20 de Brezis,H. [4]).

Ademas, si $\mid y_d \mid_p \leq \alpha$, entonces

$$\begin{aligned}
J(\varphi_n^0; a, y_d) &\geq \alpha \mid \varphi^0 \mid_{p'} - \mid y_d \mid p' \cdot \mid \varphi^0 \mid_{p'} \\
&\geq \mid \varphi^0 \mid_{p'} (\alpha - \mid y_d \mid_p) \\
&\geq 0 \qquad\qquad \forall\, \varphi^0 \in L^{p'}(\Omega)
\end{aligned}$$

y $J(0; a, y_d) = 0$, con lo que $\widehat{\varphi}^0 = 0$.

Reciprocamente, si $\widehat{\varphi}^0 = 0$, supongamos que $\alpha < \mid y_d \mid_p$.

Consideramos

$$\varepsilon = \frac{\mid y_d \mid_p - \alpha}{2},$$

[1] $\varphi_n(t,x)$ es la solución de (2.22) con $\varphi^0 = \varphi_n^0$

entonces como

$$| y_d |_p = \sup_{|\varphi^0|_{p'}=1} \int_\Omega y_d \varphi^0 dx,$$

podemos tomar $\widetilde{\varphi}^0 \in L^{p'}(\Omega)$ tal que $| \widetilde{\varphi}^0 |_{p'} = 1$ y $-\int_\Omega y_d \widetilde{\varphi}^0 + | y_d |_p < \frac{\varepsilon}{2}$, con lo que para todo $\mu > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} J(\mu\widetilde{\varphi}^0) &= \frac{\mu^2}{2}\left(\int_q \widetilde{\varphi}(t,x)dxdt\right)^2 + \mu\left(\alpha - \int_\Omega y_d\widetilde{\varphi}^0 dx\right) \\ &< \frac{\mu^2}{2}\left(\int_q \widetilde{\varphi}(t,x)dxdt\right)^2 + \mu(\alpha - | y_d |_p + \frac{\varepsilon}{2}) \\ &< \frac{\mu^2}{2}\left(\int_q \widetilde{\varphi}(t,x)dxdt\right)^2 + \mu(-2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}) \\ &< 0, \text{ si } \mu \text{ es suficientemente pequeño.} \end{aligned}$$

Pero $\widehat{\varphi}^0 = 0$ y $J(\mu\widetilde{\varphi}^0) \geq J(\widehat{\varphi}^0) = 0$, lo cual es absurdo y contradice nuestra hipótesis, con lo que $\alpha \geq | y_d |_p$.

En cuanto al operador M, supongamos que no es cierto lo expresado en la proposición, entonces existirán dos sucesiones $(a_n)_n \subset B \subset L^\infty(Q)$ y $(y_d^n)_n \subset K \subset L^p(\Omega)$ tales que

$$| \widehat{\varphi}_n^0 | = | M(a_n, y_d^n) | \to \infty. \tag{2.28}$$

Ahora por ser K compacto y B acotado, existen $a \in L^\infty(Q)$, $y_d \in L^p(\Omega)$ y dos subsucesiones de las sucesiones anteriores (que podemos renombrar con el mismo parámetro), cumpliendo:

$$a_n \overset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} a \text{ en } L^\infty(Q) \text{ debil-*}$$

y

$$y_d^n \overset{n\to+\infty}{\rightarrow} y_d \text{ fuertemente en } L^p(\Omega).$$

Veamos que la desigualdad (2.25) se mantiene si nos movemos a lo largo de los pares (a_n, y_d^n). Es decir que

$$\liminf_{|\varphi_n^0|_{p'}\to\infty} \frac{J(\varphi_n^0; a_n, y_d^n)}{| \varphi_n^0 |_{p'}} \geq \alpha. \tag{2.29}$$

Suponiendo que no es cierto existirá una sucesión $(\varphi_n^0)_n$ de $L^{p'}(\Omega)$ tal que $| \varphi_n^0 |_{p'} \to \infty$ y

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{J(\varphi_n^0; a_n, y_d^n)}{| \varphi_n^0 |_{p'}} < \alpha. \tag{2.30}$$

A continuación, siguiendo el procedimiento utilizado para probar la desigualdad (2.25), denotamos $\widetilde{\varphi}_n^0 = \dfrac{\varphi_n^0}{| \varphi_n^0 |_{p'}}$ y $\widetilde{\varphi}_n$ la solución de (2.22) con respecto a a_n y con $\widehat{\varphi}_n(T) = \widetilde{\varphi}_n^0$. Como $| \widetilde{\varphi}_n^0 |_{p'} = 1$, se puede extraer una subsucesión que volvemos a renombrar $\widetilde{\varphi}_n^0$, convergiendo en $L^{p'}(\Omega)$ debilmente, a un elemento $\widetilde{\varphi}^0$ de $L^{p'}(\Omega)$. De esto se puede deducir (del mismo modo que hicimos en la demostración de la Proposición 2.10) que $\widetilde{\varphi}_n$ converge débilmente en $L^1(q)$ a $\widetilde{\varphi}$ (solución de (2.22) con respecto a a y con $\widehat{\varphi}(T) = \widetilde{\varphi}^0$).

A continuación del mismo modo que haciamos en la demostración de la proposición (2.10), se tiene

$$\int_q | \widetilde{\varphi}_n | dxdt \overset{n\to\infty}{\rightarrow} 0,$$

y por la convergencia débil anterior y la propiedad de continuación única ya citada anteriormente

$$\widehat{\varphi}^0 = 0.$$

Ahora si $J_n = \dfrac{J(\varphi_n^0; a_n, y_d^n)}{\mid \varphi_n^0 \mid_{p'}}$, se tiene

$$J_n \geq \left(\alpha - \int_\Omega y_d^n \widetilde{\varphi}_n^0 dx\right),$$

y como $\widetilde{\varphi}_n^0$ converge débilmente a 0 en $L^{p'}(\Omega)$ y y_d^n converge fuertemente en $L^p(\Omega)$, queda

$$\liminf_{n \to +\infty} J_n \geq \alpha,$$

lo cual contradice (2.30) y prueba (2.29).

Para finalizar, basta observar que $J(0; a_n, y_d^n) = 0$, con lo que $J(\widehat{\varphi}_n^0; a_n, y_d^n) \leq 0$, lo cual entra en contradición con (2.28) y (2.29), deduciendose que

$$\{\mid \widehat{\varphi}_n^0 \mid \quad : n \in I\!N\} < +\infty. \qquad \blacksquare$$

Observación 2.11 *La caracterización (2.26) nos resuelve el problema con potencial de modo obvio con la solución trivial $y \equiv 0$.*

Para resolver el problema en el caso que nos queda ($\mid y_d \mid_p > \alpha$), necesitamos unos conceptos y resultados previos:

Definición 2.12 *Dada $V : X \to I\!R \cup \{+\infty\}$ una función convexa y propia sobre el espacio de Banach X, se dice que un elemento p_0 de V' pertenece al conjunto $\partial V(x_0)$ (subdiferencial de V en el punto $x_0 \in X$) si*

$$V(x_0) - V(x) \leq (p_0, x_0 - x) \ \forall \ x \in X.$$

Observación 2.13 *∂V es una aplicación multívoca ($V \to 2^{V'}$).*

Proposición 2.14 *Si en las condiciones anteriores V es semicontinua inferiormente, entonces $p_0 \in \partial V(x_0)$ si y solo si*

$$(p_0, x) \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{V(x_0 + hx) - V(x_0)}{h} (< +\infty) \ \forall \ x \in X. \qquad \square$$

Demostración: Ver Proposición 3 de pag 187, y Teorema 16 de pag 198 de [3] . $\blacksquare$

Observación 2.15 *En las condiciones de la Definición 2.12, si V es diferenciable, su diferencial coincide con la subdiferencial.*

Lema 2.16 *Para todo $\varphi^0 \in L^{p'}(\Omega)$, $\varphi^0 \neq 0$ si φ es la solución de (2.22) verificando $\varphi(T) = \varphi^0$, se tiene*

$$\partial J(\varphi^0; a, y_d) = \{\xi \in L^p(\Omega), \ \exists \ v \in sgn(\varphi)\chi_q \ \textit{satisfaciendo}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega \xi(x)\theta^0(x)dx \quad &= \quad \left(\int_q \mid \varphi(t,x) \mid dxdt\right)\left(\int_q v(t,x)\theta(t,x)dxdt\right) \\ &+\alpha \int_\Omega \frac{\mid \varphi^0(x) \mid^{p'-2} \varphi^0(x)}{\mid \varphi^0 \mid_{p'}^{p'-1}} \theta^0(x)dx - \int_\Omega y_d(x)\theta^0(x)dx \ \forall \theta^0 \in L^{p'}(\Omega)\},\end{aligned}$$

donde θ es la solución de (2.22) verificando $\theta(T) = \theta^0$. $\square$

Demostración:

$$J(\varphi^0) = J(\varphi^0; a, y_d) = \frac{1}{2}\left(\int_q \mid \varphi(t,x) \mid dxdt\right)^2 + \alpha \mid \varphi^0 \mid_{p'} - \int_\Omega y_d \varphi^0 dx = J_1(\varphi^0) + J_2(\varphi^0) + J_3(\varphi^0).$$

Vayamos por partes: Sea $P = \{(t,x) \in q$ tal que $\varphi(t,x) = 0\}$, y $\xi \in \partial J_1(\varphi^0)$. Entonces, como J_1 está en las condiciones de la proposición (2.14), para todo $\theta^0 \in L^{p'}(\Omega)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
(\xi, \theta^0) &\le \lim_{h \to 0^+} \frac{J_1(\varphi^0 + h\theta^0) - J_1(\varphi^0)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h}\left[\left(\int_{q-P} \mid \varphi(t,x) + h\theta(t,x) \mid dxdt\right)^2 - \left(\int_{q-P} \mid \varphi(t,x) \mid dxdt\right)^2\right] \\
&\quad + \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h}\left[\left(\int_{P} \mid \varphi(t,x) + h\theta(t,x) \mid dxdt\right)^2 - \left(\int_{P} \mid \varphi(t,x) \mid dxdt\right)^2\right] \\
&\quad + \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left[\left(\int_{q-P} \mid \varphi(t,x) + h\theta(t,x) \mid dxdt\right) \cdot \left(\int_{P} \mid \varphi(t,x) + h\theta(t,x) \mid dxdt\right)\right] \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h}\left[\left(\int_{q-P} \mid \varphi(t,x) \mid + sgn(\varphi(t,x))h\theta(t,x)dxdt\right)^2 - \left(\int_{q-P} \mid \varphi(x,t) \mid dxdt\right)^2\right] \\
&\quad + \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left[\left(\int_{q-P} (\mid \varphi(t,x) \mid + sgn(\varphi(t,x))h\theta(t,x))dxdt\right) \cdot \left(\int_{P} h \mid \theta(t,x) \mid dxdt\right)\right] \\
&= \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h}\left[h^2\left(\int_{q-P} sgn(\varphi(t,x))\theta(t,x)dxdt\right)^2\right. \\
&\quad \left. + 2h\int_{q-P} \mid \varphi(t,x) \mid dxdt \int_{q-P} sgn(\varphi(t,x))\theta(t,x)dxdt\right] \\
&\quad + \int_q \mid \varphi(t,x) \mid dxdt \cdot \int_P \mid \theta(t,x) \mid dxdt \\
&= \int_{q-P} \mid \varphi(t,x) \mid dxdt \int_{q-P} sgn(\varphi(t,x))\theta(t,x)dxdt + \int_q \mid \varphi(t,x) \mid dxdt \int_P \mid \theta(t,x) \mid dxdt \\
&= \int_{q} \mid \varphi(t,x) \mid dxdt \int_{q-P} sgn(\varphi(t,x))\theta(t,x)dxdt + \int_q \mid \varphi(t,x) \mid dxdt \int_P \mid \theta(t,x) \mid dxdt.
\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$\xi \in \partial J_1(\varphi^0) \Leftrightarrow \forall\ \theta \in L^{p'}(\Omega),$$
$$(\xi, \theta^0) \le \mid \varphi \mid_{L^1(q)} \left(\int_{q-P} sgn(\varphi(t,x))\theta(t,x)dxdt + \int_P \mid \varphi(t,x) \mid dxdt\right).$$

Ahora llamo

$$G = \{\theta \in L^1(q)/\theta \text{ es solución de (2.22) con } \theta^0 \in L^{p'}(\Omega)\}.$$

Entonces, el campo $\theta \to \theta^0 \to (\xi, \theta^0)$ es una forma lineal sobre G y aplicando el teorema de Hahn-Banach (Ver pag. 1 de [4]), existe una forma lineal V sobre $L^1(q)$, tal que

$$\forall\ \theta^0 \in L^{p'}(\Omega),\ (\xi, \theta^0) = V(\theta)$$

y $\forall\ \Theta \in L^1(q)$,

$$V(\Theta) \le \mid \varphi \mid_{L^1(q)} \left(\int_{q-P} sgn(\varphi(t,x))\Theta(t,x)dxdt + \int_P \mid \Theta(t,x) \mid dxdt\right). \tag{2.31}$$

De (2.31) se deduce que V es continua sobre $L^1(q)$ y por tanto $V \in L^\infty(q)$, con lo que

$\forall\ \Theta \in L^1(q)$,

$$\int_q V(t,x)\Theta(t,x)dxdt - \mid \varphi \mid_{L^1(q)} \int_{q-P} sgn(\varphi(t,x))\Theta(t,x)dxdt \leq \mid \varphi \mid_{L^1(q)} \int_P \mid \Theta(t,x) \mid dxdt,$$

y si cambiamos Θ por $(-\Theta)$ podemos incluir un signo negativo en el término de la izquierda y deducir que

$$\mid \int_q V(t,x)\Theta(t,x)dxdt - \mid \varphi \mid_{L^1(q)} \int_{q-P} sgn(\varphi(t,x))\Theta(t,x)dxdt \mid \leq \tag{2.32}$$

$$\leq \mid \varphi \mid_{L^1(q)} \int_P \mid \Theta(t,x) \mid dxdt \quad \forall\ \Theta \in L^1(q).$$

Si se elige primero $\Theta \in L^1(q)$ con soporte contenido en $q-P$, se obtiene que $V = \mid \varphi \mid_{L^1(q)} \dfrac{\varphi}{\mid \varphi \mid}$ en casi todo punto sobre $q-P$, y tomando a continuación $\Theta \in L^1(P)$ se obtiene

$$\mid \int_P V(t,x)\Theta(t,x)dxdt \mid \leq \mid \varphi \mid_{L^1(q)} \int_P \mid \Theta(t,x) \mid dxdt,$$

y por tanto

$$\mid V(t,x) \mid \leq \parallel V \parallel_{L^\infty(P)} \leq \mid \varphi \mid_{L^1(q)} \ \ p.c.t.\ (x,t) \in P.$$

Esto prueba que existe $v \in sgn(\varphi)\chi_q$ tal que

$$V = \mid \varphi \mid_{L^1(q)} v.$$

Reciprocamente, si una función $V \in \mid \varphi \mid_{L^1(q)} sgn(\varphi)\chi_q$, entonces

$$\theta^0 \to \int_q V(t,x)\theta(t,x)dxdt$$

es una función lineal y continua sobre $L^{p'}(\Omega)$, con lo que existe un único $\xi \in L^p(\Omega)$ tal que

$$(\xi, \theta^0) = \int_q V(t,x)\theta(t,x)dxdt\ \forall\ \theta^0 \in L^{p'}(\Omega),$$

y ξ verifica de modo obvio (2.32), concluyendose que $\xi \in \partial J(\varphi^0)$.

Por otro lado

$$J_2(\varphi^0) = \left(\int_\Omega \mid \varphi^0(x) \mid dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

y utilizando la observación (2.15),

$$\begin{aligned} \partial J_2(\varphi^0)\theta^0 &= \frac{1}{p'} \left(\int_\Omega \mid \varphi^0(x) \mid^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}-1} p' \left(\int_\Omega \mid \varphi^0(x) \mid^{p'-2} \varphi^0(x)\theta^0(x)dx \right) \\ &= \mid \varphi^0 \mid_{p'}^{-(p'-1)} \int_\Omega \mid \varphi^0(x) \mid^{p'-2} \varphi^0(x)\theta^0(x)dx. \end{aligned}$$

Finalmente (por linealidad),

$$\partial J_3(\varphi^0)\theta^0 = -\int_\Omega y_d(x)\theta^0(x)dx.$$

El resultado final se obtiene de sumar los tres resultados parciales obtenidos.

∎

Observación 2.17 *En las condiciones de la definición (2.12), x_0 minimiza V sobre X (o sobre un subconjunto convexo de X) si y solo si*

$$0 \in \partial V(x_0).$$

Llegamos por fin al resultado central de esta sección:

Teorema 2.18 *En las condiciones anteriores, si $\mid y_d \mid_p > \alpha$ y $\widehat{\varphi}$ es la solución de (2.22) verificando $\widehat{\varphi}(T) = \widehat{\varphi}^0$, entonces existe $v \in sgn(\widehat{\varphi})\chi_q$ tal que la solución de*

$$\text{(2.33)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} y - \Delta y + a(t,x)y &= \mid \widehat{\varphi} \mid_{L^1(q)} v\chi_\omega \quad \textit{en } Q \\ y &= 0 \qquad\qquad\qquad \textit{en } \Sigma \\ y(0) &= 0 \qquad\qquad\qquad \textit{en } \Omega \end{cases}$$

verifica

$$y(T) = y_d - \alpha \cdot \frac{\mid \widehat{\varphi}^0 \mid^{p'-2} \widehat{\varphi}^0}{\mid \widehat{\varphi}^0 \mid_{p'}^{p'-1}},$$

y por tanto $\mid y(T) - y_d \mid = \alpha$. □

Demostración: Utilizando la subdiferenciabilidad de $J(.;a,y_d)$ en su mínimo $\widehat{\varphi}^0 \neq 0$ (según el Lema 2.16) , y la Observación 2.17,

$$0 \in \partial J(\widehat{\varphi}^0),$$

que segun el lema (2.16) es equivalente a la existencia de $v \in \mid \widehat{\varphi} \mid_{L^1(q)} sgn(\widehat{\varphi})\chi_q$, tal que

$$\text{(2.34)} \qquad - \mid \widehat{\varphi} \mid_{L^1(q)} \left(\int_q v(t,x)\theta(t,x)dxdt \right) = \frac{\alpha}{\mid \widehat{\varphi} \mid_{p'}^{p'-1}} \int_\Omega \mid \widehat{\varphi}^0(x) \mid^{p'-2} \widehat{\varphi}^0(x)\theta^0(x)dx$$

$$- \int_\Omega y_d(x)\theta^0(x)dx.$$

Ahora, si multiplicamos (2.33) por θ se obtiene:

$$\int_Q y(-\frac{\partial}{\partial t}\theta - \Delta\theta + a(t,x)\theta)dxdt + \int_\Omega y(T)\theta(T)dx = \left(\int_q \mid \widehat{\varphi}(t,x) \mid dxdt \right) \left(\int_q v(t,x)\theta(t,x)dxdt \right),$$

es decir:

$$\text{(2.35)} \qquad (y(T), \theta^0) = \left(\int_q \mid \widehat{\varphi}(t,x) \mid dxdt \right) \left(\int_q v(t,x)\theta(t,x)dxdt \right).$$

Por otro lado de (2.34) y (2.35) se obtiene

$$(y(T); \theta^0) = (y_d - \alpha \frac{\mid \widehat{\varphi}^0 \mid^{p'-2} \widehat{\varphi}^0}{\mid \widehat{\varphi}^0 \mid_{p'}^{p'-1}}, \theta^0) \ \forall \ \theta^0 \in L^{p'}(\Omega)$$

y se concluye que $y(T) = y_d - \alpha \dfrac{\mid \widehat{\varphi}^0 \mid^{p'-2} \widehat{\varphi}^0}{\mid \widehat{\varphi}^0 \mid_{p'}^{p'-1}}$. ■

2.4 Una demostración constructiva de la controlabilidad aproximada para el problema de Stokes.

2.4.1 Introducción.

Consideremos el sistema de Stokes (que describe el flujo de un fluido incompresible viscoso) sobre un dominio acotado $\Omega \subset I\!R^d$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}y(t,x) - \Delta y(t,x) - \nabla q(t,x) &= u(t,x),\ (t,x) \in Q = (0,T)\times\Omega\times && (2.36)\\
div\ y(t,x) &= 0 \text{ en } Q && (2.37)\\
y(t,x) &= 0 \text{ en } \Sigma = (0,T)\times\partial\Omega && (2.38)\\
y(0,x) &= 0 \text{ en } \Omega, && (2.39)
\end{aligned}$$

donde $y(t,x) \in I\!R^d$ representa la velocidad del flujo, $\nabla q(t,x)$ el gradiente de la presión y $u(t,x)$ representa una densidad de fuerzas externas que será el control a ejercer sobre el sistema.

Asumimos que $u(t,x)$ está concentrado en un subdominio dado, es decir:

$$supp\ u(t,\cdot) \subset \omega,\ \omega \subset \Omega,\ c\forall\ t \in (0,T)$$

Notaremos por U, Y, Q, H a ciertos espacios de Banach. Supondremos que para cada $u \in U$ existe una única solución $(y,q) \in Y \times Q$ del problema (2.36)-(2.39). Si γ_T es el operador $\gamma_T y = y(T,\cdot)$, supondremos que $\gamma_T : Y \to H$ es un operador continuo.

Definición 2.19 *Se dice que el problema (2.36)-(2.39) es H-controlable aproximadamente respecto al espacio de controles U, si para $y_d \in H$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, existe un control $u \in U$ tal que la solución $y = y(u)$ del problema cumple*

$$\| \gamma_T y - y_d \|_H < \varepsilon.$$

Notación. Para un dominio $G \subset I\!R^d$ arbitrario, notaremos:

$$\begin{aligned}
&V(G) = \{v(x) \in (C_0^\infty(I\!R^d))^d :\ supp\ v \subset G,\ div(v) = 0\}\\
&V^0(G) = \overline{V(G)}^{(L^2(G))^d}\\
&V^1(G) = \overline{V(G)}^{(W^{1,2}(G))^d}\\
&V^2(G) = (W^{2,2}(G))^d \cap V^1(G),
\end{aligned}$$

donde $W^{k,2}(G)$ es el espacio de Sobolev usual (vease por ejemplo Brezis,H. [4]).

Si consideramos el espacio

$$U = L^2(0,T;V^0(\omega))$$

como espacio de controles, entonces podemos tomar

$$\begin{aligned}
Y &= \{y(t,\cdot) \in L^2(0,T;V^2(\Omega)) :\ \frac{\partial}{\partial t}y \in L^2(0,T;V^0(\Omega))\} && (2.40)\\
Q &= \{q(t,x) \in \mathcal{D}'((0,T)\times\Omega) : \nabla q \in (L^2((0,T)\times\Omega))^d\},
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{D}'((0,T)\times\Omega)$ representa el espacio de distribuciones sobre $(0,T)\times\Omega$.

Un resultado conocido (vease Lions,J.L.-Magenes,E. [30]) es que $\gamma_T Y = V^1(\Omega) \subset V^0(\Omega)$, por lo que para los indicados U, Y, Q, se puede tomar $H = V^i(\Omega)$, $i = 0, 1$. En lo que sigue consideraremos el caso $H = V^0(\Omega)$.

En los trabajos Fursikov,A.V.-Imanuvilov,O.Yu. [18], [19], se dá una demostración directa de la $V^0(\Omega)$-controlabilidad aproximada de (2.36)-(2.39) respecto al espacio de controles $L^2(0,T;V^0(\omega))$. A continuación, se dá una demostración constructiva del mismo resultado, utilizando la teoría de problemas extremales.

2.4.2 Problemas extremales.

Dado un dominio $G \subset I\!R^d$, denotamos por Π_G a la proyección ortogonal del espacio $(L^2(G))^d$ sobre $V^0(G)$, y por comodidad notaremos $\Pi_\Omega = \Pi$ cuando $G = \Omega$.

Si aplicamos el operador Π sobre ambas caras de (2.36) teniendo en cuenta que $y \in Y$, donde Y es el espacio definido en (2.40) y $u \in L^2(0,T;V^0(\omega))$, obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t,x) - \Pi\Delta y(t,x) = u(t,x) \tag{2.41}$$

Consideremos a continuación el problema extremal

$$\inf J_\varepsilon(y,u), \;\; J_\varepsilon(y,u) = \frac{1}{2} \parallel \gamma_t y - y_d \parallel^2_{V^0(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \parallel u(\tau) \parallel^2_{V^0(\omega)} d\tau, \tag{2.42}$$

estando J_ε definido sobre el espacio de pares $(y,u) \in Y \times L^2(0,T;V^0(\omega))$ satisfaciendo (1.7), (2.41).

Proposición 2.20 *Fijado $\varepsilon > 0$, existe una única solución $(y_\varepsilon, u_\varepsilon) \in Y \times L^2(0,T;V^0(\omega))$ del problema (1.7),(2.41),(2.42).* □

Demostración: Ver por ejemplo Fursikov,A.V. [16] o Fursikov,A.V. [17]. ■

La $V^0(\Omega)$-controlabilidad aproximada del sistema de Stokes respecto a $L^2(0,T;V^0(\omega))$ queda probada si

$$\parallel \gamma_T y_\varepsilon - y_d \parallel_{V^0(\Omega)} \to 0 \text{ cuando } \varepsilon \to 0. \tag{2.43}$$

Proposición 2.21 *Un par $(y,u) \equiv (y_\varepsilon, u_\varepsilon) \in Y \times L^2(0,T;V^0(\omega))$ es solución del problema (1.7),(2.41),(2.42), si y solo si satisface (1.7),(2.41) y existe $p \in Y$ tal que*

$$-\frac{\partial}{\partial t} p(t,x) - \Pi\Delta p = 0 \text{ en } Q \tag{2.44}$$

$$p(t,x) = 0 \text{ en } \Sigma \tag{2.45}$$

$$p(T,\cdot) = y_d - y(T,\cdot) \text{ en } \Omega \tag{2.46}$$

$$\varepsilon u(t,\cdot) = \hat{\Pi}_\omega p(t,\cdot) \text{ en } \Omega, \tag{2.47}$$

donde $\hat{\Pi}_\omega p = L_\omega \circ \Pi_\omega \circ p \mid_\omega$, con L_ω el operador de extensión por cero sobre el exterior de ω. □

Demostración: Aplicamos el principio de multiplicadores de Lagrange para problemas regulares (ver Alekseev,V.M.-Tikhomirov,V.M.-Fomin,S.V. [1] o Fursikov,A.V. [17]), que dice: Sean Z, W dos espacios de Bananch y $\hat{z}$ una solución del problema extremal

$$\inf g(z), \tag{2.48}$$

sobre elementos z cumpliendo

$$G(z) = 0, \tag{2.49}$$

donde $g : Z \to I\!R$ es un funcional continuamente diferenciable y estrictamente convexo, y $G : Z \to W$ es un operador lineal, continuo y sobreyectivo. Entonces existe un funcional λ lineal y continuo sobre W tal que la función de Lagrange

$$L(z, \lambda) = g(z) + < Gz, \lambda >_W$$

satisface la igualdad

$$< L'_z(\hat{z}, \lambda), h >_Z := < g'(\hat{z}), h >_Z + < Gh, \lambda >_W = 0 \ \forall \ h \in Z, \tag{2.50}$$

donde $< \cdot, \cdot >_V$ representa el producto de dualidad entre un espacio de Banach V y su dual V^*. Ademas, si $\hat{z} \in Z$ satisface (2.49), (2.50), entonces z es solución del problema (2.48).

En nuestro caso, tomamos $z = (y, u)$, $Gz = \frac{\partial}{\partial t} y - \Pi \Delta y - u$, $g(z) = J_\varepsilon(y, u)$, $W = L^2(0, T; V^0(\Omega))$ y $Z = Y_0 \times L^2(0, T; V^0(\omega))$, donde $Y_0 = \{y(t, \cdot) \in Y : y(0, \cdot) = 0\}$. En esta situación se cumplen las condiciones anteriores. La condición de sobreyectividad de G se sigue de la existencia y unicidad de solución para el problema de contorno del sistema de Stokes (vease Ladyzhenskaya,O.A. [25]; Temam,R. [40]).

La función de Lagrange que se obtiene es:

$$L(y, u, p) = J_\varepsilon(y, u) + < \frac{\partial}{\partial t} y - \Pi \Delta y - u, p >_{L^2(0,T;V^0(\Omega))}$$

y la ecuación (2.50) se escribe como:

$$(\gamma_T y - y_d, \gamma_T h)_{V^0(\Omega)} + (\frac{\partial}{\partial t} h - \Pi \Delta h, p)_{L^2(0,T;V^0(\Omega))} + \varepsilon \int_0^T (u(t), v(t))_{V^0(\omega)} dt \tag{2.51}$$

$$-(v, p)_{L^2(0,T;V^0(\Omega))} = 0 \ \forall \ (h, v) \in Z,$$

o lo que es lo mismo:

$$(\gamma_T y - y_d, \gamma_T h)_{V^0(\Omega)} + (\frac{\partial}{\partial t} h - \Pi \Delta h, p)_{L^2(0,T;V^0(\Omega)} = 0, \ \forall \ h \in Y_0, \tag{2.52}$$

junto con:

$$\varepsilon \int_0^T (u(t), v(t))_{V^0(\Omega)} dt - (v, p)_{L^2(0,T;V^0(\Omega))} = 0, \ \forall \ v \in L^2(0, T; V^0(\omega)). \tag{2.53}$$

Ahora, del mismo modo que en Fursikov,A.V. [17], la igualdad (2.52) implica (2.44),(2.45),(2.46). Ademas la igualdad

$$(v, p)_{L^2(0,T;V^0(\Omega))} = (v, p)_{L^2(0,T;V^0(\omega))}, \ \forall \ v \in L^2(0, T; V^0(\omega)),$$

junto con (2.53), implican (2.47) y termina la demostración.

■

Si sustituimos (2.47) en (2.41) y tenemos en cuenta (1.7), obtenemos las igualdades:

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t, x) - \Pi \Delta y = \frac{1}{\varepsilon} (\hat{\Pi}_\omega p)(t, x) \text{ en } Q, \tag{2.54}$$

$$y(0, x) = 0 \text{ en } \Omega. \tag{2.55}$$

Resolvamos a continuación, el problema (2.44), (2.45), (2.46), (2.54), (2.55).

La teoría de semigrupos (vease por ejemplo Pazy,A. [33], o más concretamente para este caso Vishik,M.I.-Fursikov,A.V. [41]) nos dice que la solución de (2.44), (2.45), (2.46) es

$$p(t,\cdot) = e^{\Pi\Delta(T-t)}(y_d - y(T,\cdot)), \tag{2.56}$$

y aplicando el metodo de variación de las constantes en (2.54), (2.55) obtenemos que

$$y(t,\cdot) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\Pi\Delta(t-\tau)}\hat{\Pi}_\omega p(\tau,\cdot)d\tau. \tag{2.57}$$

Ahora, sustituyendo (2.56) en (2.57) y tomando $t = T$ queda

$$y(T,\cdot) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T e^{\Pi\Delta(T-\tau)}\hat{\Pi}_\omega(e^{\Pi\Delta(T-\tau)}(y_d(\cdot) - y(T,\cdot)))d\tau. \tag{2.58}$$

Si introducimos el operador R definido por

$$Rz = \int_0^T e^{\Pi\Delta(T-\tau)}\hat{\Pi}_\omega(e^{\Pi\Delta(T-\tau)}(z))d\tau, \tag{2.59}$$

podemos reescribir (2.58) como

$$(I + \varepsilon^{-1}R)y(T) = \varepsilon^{-1}Ry_d. \tag{2.60}$$

Para resolver (2.60) debemos estudiar el operador R.

2.4.3 Propiedades del operador R.

Lema 2.22 *El operador $R : V^0(\Omega) \to V^0(\Omega)$ definido por (2.59) es compacto autoadjunto y no negativo.* □

Demostración:

Como $\Pi\Delta$ es un operador autoadjunto y definido negativo en $V^0(\Omega)$, el operador $e^{\Pi\Delta(T-t)}$ es autoadjunto, con lo que para todo $z_1,\ z_2 \in V^0(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned}
(Rz_1, z_2)_{V^0(\Omega)} &= \int_0^T (e^{\Pi\Delta(T-\tau)}(\hat{\Pi}_\omega e^{\Pi\Delta(T-\tau)}(z_1)), z_2)_{V^0(\Omega)}d\tau \\
&= \int_0^T (\Pi_\omega(e^{\Pi\Delta(T-\tau)}(z_1)) \mid_\omega, e^{\Pi\Delta(T-\tau)}(z_2) \mid_\omega)_{V^0(\omega)}d\tau \\
&= \int_0^T (z_1, e^{\Pi\Delta(T-\tau)}\hat{\Pi}_\omega(e^{\Pi\Delta(T-\tau)}z_2))_{V^0(\Omega)}d\tau \\
&= (z_1, Rz_2)_{V^0(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Ademas, a partir de (2.61), se tiene que

$$(Rz, z)_{V^0(\Omega)} = \int_0^T \| \hat{\Pi}_\omega e^{\Pi\Delta(T-\tau)}z \|^2_{V^0(\Omega)} d\tau \geq 0.$$

Por otro lado, en Vishik,M.I.-Fursikov,A.V. [41] (pag. 19), se prueba que el operador $z \to e^{\Pi\Delta(T-\tau)}z$ es continuo de $V^0(\Omega)$ en $L^2(0,T;V^2(\Omega))$, con lo que el operador $z \to \hat{\Pi}_\omega(e^{\Pi\Delta(T-\tau)}z)$ es continuo de $V^0(\Omega)$ en $L^2(0,T;V^0(\Omega))$ y así el operador (2.59) es continuo de $V^0(\Omega)$ en $V^1(\Omega)$. De este modo, como $V^1(\Omega) \subset\subset V^0(\Omega)$ con inclusión compacta (vease p.e. el Teorema IX.6 (de Rellich-Kondrachov) en Brezis,H. [4]), se deduce que el operador $R : V^0(\Omega) \to V^0(\Omega)$ también es compacto.

■

Una propiedad fundamental del operador R es el siguiente

Lema 2.23 *Ker* $R = 0$ $(R : V^0(\Omega) \to V^0(\Omega))$. □

Demostración:

Vease Fursikov,A.V.-Imanuvilov,O.Yu. [20]. ■

2.4.4 Resultados principales.

Los lemas (2.22), (2.23) y el teorema de Gilbert-Schmidt (veanse los teoremas VI.8 y VI.11 de Brezis,H. [4]) implican que el operador R tiene una base ortonormal $\{e_j\}$ de $V^0(\Omega)$, que son autofunciones con autovalores $\{\lambda_j\}$ cumpliendo, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots,\ \lambda_j \to 0$ cuando $j \to \infty$. De este modo, si $z \in V^0(\Omega)$

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} z_j e_j, \text{ entonces } Rz = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j z_j e_j. \tag{2.62}$$

Ahora utilizando (2.57), (2.62), si $y(T) = \sum_{j=1}^{\infty} y_j e_j,\ y_d = \sum_{j=1}^{\infty} y_{d_j} e_j$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\varepsilon + \lambda_j) y_j e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j y_{d_j} e_j,$$

lo que implica que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (y_{d_j} - y_j) e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon y_j e_j,$$

y por tanto

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\lambda_j + \varepsilon)(y_{d_j} - y_j) e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon y_{d_j} e_j.$$

De este modo,

$$y_d - y(T,\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon y_{d_j} e_j}{(\varepsilon + \lambda_j)}. \tag{2.63}$$

Teorema 2.24 *Dado cualquier $\varepsilon > 0$, el problema (2.44), (2.45), (2.46), (2.54), (2.55) tiene una única solución $(p_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t))$. Ademas,*

$$p_\varepsilon(t) = e^{\Pi\Delta(T-t)} \varepsilon (\varepsilon I + R)^{-1} y_d, \tag{2.64}$$

donde R es el operador (2.59) e $y_\varepsilon(t)$ viene dado por (2.57). Por último se cumple la convergencia (2.43). □

Demostración:

En primer lugar, la igualdad (2.64) se deduce de (2.56) y (2.63).

En segundo lugar, (2.57) y (2.64) implican la existencia y unicidad de solución para el problema (2.44), (2.45), (2.46), (2.54), (2.55).

Probemos por último la convergencia (2.43).

$$\begin{aligned} \| y_d - y(T) \|^2_{V^0(\Omega)} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^2 \mid y_{d_j} \mid^2}{(\varepsilon + \lambda_j)^2} \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon^2 \mid y_{d_j} \mid^2}{(\varepsilon + \lambda_j)^2} + \sum_{j=N+1}^{\infty} \mid y_{d_j} \mid^2 . \end{aligned}$$

Entonces, dado $\delta > 0$ arbitrario, existe $N \in I\!N$ tal que

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \mid y_{d_j} \mid^2 < \frac{\delta}{2}.$$

Ahora, fijado este N,

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon^2 \mid y_{d_j} \mid^2}{(\varepsilon + \lambda_j)^2} \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{\varepsilon^2 \mid y_{d_j} \mid^2}{\lambda_N^2} < \frac{\delta}{2},$$

para ε suficientemente pequeño, lo que acaba la demostración. ■

En conclusión, podemos enunciar el resultado siguiente:

Teorema 2.25 *El problema (2.36)-(2.39) es $V^0(\Omega)$-controlable aproximadamente respecto al espacio de controles $L^2(0,T;V^0(\omega))$. Ademas, si $(y_\varepsilon(t,\cdot), u_\varepsilon(t,\cdot))$ es la solución del problema (2.36)-(2.39), con control*

$$u_\varepsilon = \hat{\Pi}_\omega(e^{\Pi\Delta(T-t)}(\varepsilon I + R)^{-1} y_d),$$

entonces y_ε satisface la convergencia (2.43). □

Demostración:

Basta aplicar el Teorema 2.24, teniendo en cuenta (2.41) y (2.54). ■

Observación 2.26 Un resultado más fino que el Teorema 2.25 es debido a J.L. Lions [26], [27] y segura que se puede obtener la controlabilidad aproximada por medio de controles de la forma $\underline{u} = (u_1, u_2, 0)$. Recientementen en Díaz,J.I.-Fursikov,A.V. [10] se ha probado que el caso de controles $\underline{u} = (u_1, 0, 0)$ origina distintos tipos de respuestas, siendo positivas para dominios cilíndricos.

Capítulo 3

CONTROLABILIDAD APROXIMADA DE PROBLEMAS PARABOLICOS SEMILINEALES. CASO SUBLINEAL.

3.1 Presentación del problema.

Seguiremos en este capítulo con la notación del ejemplo (2.3), pero con dimensión arbitraria $N \geq 1$. Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función real sobre la que despues impondremos algunas restricciones necesarias.

Dado $T > 0$, se considera la ecuación semilineal del calor siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + f(y) & = & h\chi_\omega & \text{en } Q \\ y & = & 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) & = & y_0 & \text{en } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.1}$$

En esta ocasión, dado $p \leq 1$ e $y_0 \in L^p(\Omega)$ se pretende mostrar que el conjunto $E(T) = \{y(T,x),, y$ es solución de (3.1) y $h \in L^p(Q)\}$, es denso en $L^p(\Omega)$ ($h = h(t,x)$ representa el control).

Antes de exponer el teorema objetivo de este capítulo necesitamos la siguiente

Definición 3.1 *Dadas dos funciones medibles $v, s : Q \to I\!R$, se dice que $v \in sgn(s)$, si se cumple:*

$$v(t,x) = \frac{s(t,x)}{\mid s(t,x) \mid} \; si \; s(t,x) \neq 0 \; y \; \mid v(t,x) \mid \leq 1 \; si \; s(t,x) = 0 \; c\forall \; (t,x) \in Q.$$

El resultado que sigue es una ligera generalización del dado en Fabre,C.-Pierre,J.P.-Zuazua,E. [15] (para f locálmente Lipschitz en todo $s \in I\!R$).

Teorema 3.2 *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

a) Existe al menos una solución del problema (3.1).
b) Existe $M > 0$, $a > 0$ y $b > 0$ tal que $\mid f(s) \mid \leq a + b \mid s \mid$, si $\mid s \mid > M$.
c) Existe $s_o \in I\!R$, $c > 0$ y $\delta > 0$, tal que $\mid f(s) - f(s_0) \mid \leq c \mid s - s_0 \mid$, si $s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta)$.

Entonces, el sistema (3.1) es $L^p(\Omega)$-controlable aproximadamente (segun la definición (2.1)), para $1 < p < \infty$ y $T > 0$ arbitrarios. Ademas los controles buscados se pueden tomar de la forma:

$$h(t,x) \in \left(\int_{(0,T)\times\omega} \mid \varphi(t,x) \mid dxdt \right) sgn(\varphi)\chi_q,$$

donde φ es solución de una determinada ecuación del calor (que más adelante especificaremos), y χ_q es la función caracteristica de $q = (0,T) \times \omega$.

Ejemplo 3.3 *Algunos ejemplos de funciones f para las que se verifican las condiciones del teorema son:*

1. *f continua y creciente cumpliendo b) y c) del teorema anterior.*
2. *f continua en $I\!R$ y localmente Lipschitziana en un punto s_0, cumpliendo a) y b).*
3. *f continua cumpliendo b) y c) tal que $f(s) - f(\hat{s}) \geq c(s - \hat{s})$ si $s \geq \hat{s}$(Vease Díaz,J.I.-DeThelin,F. [9] para la existencia y unicidad de solución).*
4. *f localmente Lipschitz cumpliendo a) y b) del teorema anterior*
5. *$f(s) =\mid s \mid^{p-1} s$, con $0 < p \leq 1$.*

Esquema. Resolveremos el problema en dos etapas:
a)Aplicaremos los resultados vistos en la controlabilidad aproximada de la ecuación del calor lineal con un potencial.
b)Trataremos el caso no lineal mediante un argumento de punto fijo.

3.2 Demostración de la controlabilidad aproximada.

En esta sección, según se ha dicho anteriormente se utilizará un argumento de punto fijo que exponemos despues de una definición previa:

Definición 3.4 *Dados dos espacios de Banach X, Y, una aplicación multívoca $\Lambda : X \to \mathcal{P}(Y)$ se dice que es hemicontinua superiormente en $x_0 \in X$, si $\forall p \in Y'$, la aplicación*

$$x \to \sigma(\Lambda(x), p) = \sup_{y \in \Lambda(x)} < p, y >_{Y' \times Y}$$

es semicontinua superiormente en x_0.

La correspondencia se dirá hemicontinua superiormente en un subconjunto K de X, si lo es en todos sus puntos.

Teorema 3.5 (Teorema de punto fijo de Kakutani). *Sea $K \subset X$ un subconjunto convexo y compacto, y $\Lambda : K \to K$ una aplicación hemicontinua superiormente que toma como valores conjuntos convexos, cerrados y no vacios. Entonces existe un punto fijo x_0, de la aplicación multívoca Λ.* $\square$

Demostración: Ver p.e. pag. 126 de [2] .

■

Volvamos a la consideración del problema (3.1). Gracias a la hipótesis c), supuesta sobre f, se tiene que la función g definida por

$$g(s) = \begin{cases} \dfrac{f(s) - f(s_0)}{s - s_0} & \text{si } s \neq s_0 \\ c & \text{si } s = s_0 \text{ (sirve cualquier otro valor),} \end{cases}$$

verifica $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, pues

$$| g(s) |= \frac{| f(s) - f(s_0) |}{| s - s_0 |} \leq \frac{c | s - s_0 |}{| s - s_0 |} = c < \infty, \text{ si } s \in (s_0 - \delta, s_0 + \delta).$$

y

$$| g(s) |= \frac{| f(s) - f(s_0) |}{| s - s_0 |} \leq \frac{a + | f(s_0) |}{| s - s_0 |} + \frac{b | s - s_0 + s_0 |}{| s - s_0 |} \leq \frac{a + | f(s_0) |}{\delta} + b + \frac{b | s_0 |}{\delta}$$

$$< \infty, \text{ si } s \in \mathbb{R} - [(s_0 - \delta, s_0 + \delta) \cup (-M, M)] \,.$$

Finalmente, si s no está en las condiciones anteriores, entonces s está sobre un compacto de $\mathbb{R}$ que no contiene a s_0. De la continuidad de f deducimos que g está acotada sobre ese compacto.

A continuación, dado $z \in L^p(Q)$ se descompone $y = u(z) + Y(z)$, donde $u = u(z)$ es la solución de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u - \Delta u + g(z)u &= -f(s_0) + g(z)s_0 \quad \text{en } Q \\ u &= 0 \quad \text{en } \Sigma \\ u(0) &= y_0 \quad \text{en } \Omega, \end{cases}$$

e $Y(z)$ se definirá más tarde. Entonces, como $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, debido al efecto regularizante de la ecuación del calor, por (2.23) y resultados de compacidad (ver Teorema 3 de la pag. 80 de [39]) se tiene que el conjunto

$$\{y_d - u(T), \; z \in L^p(Q)\} \tag{3.2}$$

es un subconjunto relativamente compacto de $L^p(\Omega)$.

Por los resultados de la sección 2.3, aplicados con $a(x) = g(z(x))$, el funcional

$$\begin{array}{rcl} L^{p'}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi^0 & \longrightarrow & J(\varphi^0; g(z), y_d - u(z)) \end{array}$$

tiene un único mínimo $\varphi^0(z, y_0, y_d)$ y existe $v(z, y_0, y_d) \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_q(^1)$, tal que la solución $Y = Y(z)$ de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}Y - \Delta Y + g(z)Y = | \varphi(z, y_0, y_d) |_{L^1(q)} \, v(z, y_0, y_d)\chi_\omega \text{ en } Q \\ Y = 0 \text{ en } \Sigma \\ Y(0) = 0 \text{ en } \Omega, \end{cases} \tag{3.3}$$

satisface $| Y(T) - y_d + u(T) |_p \leq \alpha$.

[1] $\varphi(z, y_0, y_d)$ es la solución de (2.22) con $\varphi(z, y_0, y_d)(T) = \varphi^0(z, y_0, y_d)$

Por tanto, $y = u + Y$ es solución de

$$
(3.4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} y - \Delta y + g(z)y = -f(s_0) + g(z)s_0 + \mid \varphi(z, y_0, y_d) \mid_{L^1(q)} v(z, y_0, y_d)\chi_\omega \text{ en } Q \\ y = 0 \text{ en } \Sigma \\ y(0) = y_0 \text{ en } \Omega \\ \mid y(T) - y_d \mid_p \leq \alpha. \end{cases}
$$

Ahora si $v \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_q$, denotamos por $y(v)$ a la solución de

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} y - \Delta y + g(z)y = -f(0) + g(z)s_0 + \mid \varphi(z, y_0, y_d) \mid_{L^1(q)} v\chi_\omega \text{ en } Q \\ y = 0 \text{ en } \Sigma \\ y(0) = y_0 \text{ en } \Omega. \end{cases}
$$

y consideramos la aplicación multívoca $\Lambda : L^p(Q) \to \mathcal{P}(L^p(Q))$ dada por

$$
\Lambda(z) = \{y(v), \ v \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_q, \ \ \mid y(T) - y_d \mid_p \leq \alpha\}.
$$

Por lo mencionado anteriormente $\Lambda(z)$ es no vacio, y ademas se tiene el siguiente resultado.

Proposición 3.6 *En las condiciones anteriores, se cumple:*

(i) Existe un subconjunto compacto X de $L^p(Q)$, tal que para cada $z \in L^p(Q)$, $\Lambda(z) \subset X$.

(ii) Para cada $z \in L^p(Q)$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto no vacio, convexo y compacto de $L^p(Q)$.

(iii) Λ es hemicontinua superiormente. $\square$

Demostración:

(i) Como $g(\cdot) \in L^\infty(I\!R)$, se tiene que

$$
\{g(z), \ z \in L^p(Q)\}
$$

es un conjunto acotado en $L^\infty(Q)$. Si a esto le unimos (3.2), la proposición (2.10) y la desigualdad (2.23), obtenemos que el conjunto

$$
\{\varphi(z, y_0, y_d), \ z \in L^p(Q)\}
$$

es acotado en $L^\infty(0, T; L^{p'}(\Omega))$, y por tanto

$$
\{\mid \varphi(z, y_0, y_d) \mid_{L^1(q)} v, \ v \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_q, \ z \in L^p(Q)\}
$$

está acotado en $L^\infty(Q)$, y de nuevo usando la desigualdad (2.23) existe un subconjunto acotado X en $L^P(Q)$ tal que para cada $z \in L^P(Q)$, $\Lambda(z) \subset X$.

Para ver que se puede elegir X compacto, basta probar que el conjunto

$$
\mathcal{Y} = \{y(v), \ v \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_q, \ z \in L^p(Q)\}
$$

es relativamente compacto en $L^p(Q)$.

En efecto, si $y = y(v) \in \mathcal{Y}$, existe $z \in L^p(Q)$ y $v \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_q$ tal que $y = u_1+u_2+Y$, donde Y viene dado por (3.3) y $u_1,\ u_2$ están determinados por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u_1 - \Delta u_1 = -f(s_0) \text{ en } Q \\ u_1 = 0 \text{ en } \Sigma \\ u_1(0) = y_0 \text{ en } \Omega, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u_2 - \Delta u_2 + g(z)(u_1 + u_2) = g(z)s_0 \text{ en } Q \\ u_2 = 0 \text{ en } \Sigma \\ u_2(0) = 0 \text{ en } \Omega. \end{cases}$$

Al ser u_1 un elemento fijo de $L^p(Q)$, si variamos z a lo largo de $L^p(Q)$, $g(z)u_1$ describe un conjunto acotado de $L^p(Q)$ (pues según hemos visto anteriormente, $\{g(z),\ z \in L^p(Q)\}$ está acotado en $L^\infty(Q)$). Entonces por (2.24), las soluciones u_2 están en un conjunto acotado de $X^p(0,T)$. Ahora como $X^p(0,T) \subset L^p(Q)$ con inclusión compacta (utilizando el Teorema 3 de la pag. 80 de Simon,J. [39]), u_2 está en un conjunto compacto K_1 de $L^p(Q)$.

Por otro lado, ya hemos visto que las funciones $\mid \varphi(z, y_0, y_d) \mid_{L^1(q)} v$ están acotadas en $L^\infty(Q)$, con lo que de nuevo usando (2.24) $Y(v)$ está en un conjunto acotado de $X^p(0,T)$, y como antes $Y(v) \subset K_2$, con K_2 compacto en $L^p(Q)$.

Por tanto $\mathcal{Y} \subset u_1 + K_1 + K_2$, que es relativamente compacto en $L^p(Q)$. Esto finaliza la prueba si se toma $X = \overline{\mathcal{Y}} \subset L^p(Q)$.

ii) Ya hemos visto que para todo $z \in L^p(Q)$, $\Lambda(z)$ es un subconjunto no vacio de $L^p(Q)$. Ademas $\Lambda(z)$ es convexo, pues dados $y(v_1),\ y(v_2) \subset \Lambda(z)$ y $\lambda \in [0,1]$, entonces $\omega = \lambda y(v_1) + (1-\lambda)y(v_2)$ verifica

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\omega - \Delta\omega + g(z)\omega = -f(s_0) + g(z)s_0 + \mid \varphi(z, y_0, y_d) \mid_{L^1(q)} (\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2)\chi_\omega, \text{ en } Q \\ \omega = 0 \text{ en } \Sigma \\ \omega(0) = y_0 \text{ en } \Omega, \end{cases}$$

$\omega(T) = \lambda y(v_1)(T) + (1-\lambda)y(v_2)(T) \in B(y_d, \alpha)$ (pues $B(y_d, \alpha)$ es un conjunto convexo) y $\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_q$ de modo obvio.

Por último solo nos queda ver que $\Lambda(z)$ es un subconjunto compacto de $L^p(Q)$. En el apartado ii) hemos probado que $\Lambda(z) \subset X$ con X compacto, luego en particular X es cerrado. Sea $(y_n)_n$ una sucesión de elementos de $\Lambda(z)$ que convergen en $L^p(Q)$ a un elemento $y \in X$. Tenemos que ver que $y \in \Lambda(z)$.

Sabemos que existen funciones $v_n \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_q$ tales que

$$\text{(3.5)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}y_n - \Delta y_n + g(z)y_n = -f(s_0) + g(z)s_0 + \mid \varphi(z, y_0, y_d) \mid_{L^1(q)} v_n\chi_\omega \text{ en } Q \\ y_n = 0 \text{ en } \Sigma \\ y_n(0) = y_0 \text{ en } \Omega \\ \mid y_n(T) - y_d \mid_p \leq \alpha. \end{cases}$$

Puesto que $\mid v_n \mid_{L^\infty} \leq 1$, $\exists\ v \in L^\infty(q)$ tal que, despues de extraer una subsucesión se obtiene

$$v_n \rightharpoonup v \text{ debil-* en } L^\infty(q),$$

con $v \in sgn(\varphi(z, y_0, y_d))\chi_q$ (pues $v_n(t,x) = \dfrac{\varphi(t,x)}{\mid \varphi(t,x) \mid}$ $\forall\ n \in I\!N$ si $\varphi(t,x) \neq 0$; $y \mid v \mid_{L^\infty(q)} \leq 1$).

De este modo, si pasamos al límite en (3.5) obtenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}y - \Delta y + g(z)y = -f(s_0) + g(z)s_0 + \mid \varphi(z, y_0, y_d) \mid_{L^1(q)} v\chi_\omega \text{ en } Q \\ y = 0 \text{ en } \Sigma \\ y(0) = y_0 \text{ en } \Omega \end{cases},$$

y por el efecto regularizante de la ecuación del calor, $y_n(T)$ converge en $L^p(\Omega)$ a $y(T)$ (de nuevo utilizando el resultado de compacidad de la pag. 80 de Simon,J. [39]), con lo que $\mid y(T) - y_d \mid_p \leq \alpha$. Esto prueba que $y \in \Lambda(z)$ y finaliza la demostración de ii).

iii) Segun la definición (3.4), tenemos que probar que si $z_0 \in L^p(Q)$, se cumple

$$\limsup_{z_n \to z_0} \sigma(\Lambda(z_n), k) \leq \sigma(\Lambda(z_0), k), \ \forall \ k \in L^{p'}(Q).$$

En ii) hemos visto que $\Lambda(z)$ es compacto, por lo que para cada $n \in I\!N$ existe $y_n \in \Lambda(z_n)$ tal que

$$\sigma(\Lambda(z_n), k) = \int_Q k(t,x) y_n(t,x) dx dt.$$

Ahora por i) $(y_n)_n \subset X$ (compacto), luego existe $y \in L^p(Q)$ tal que (despues de extraer una subsucesión) $y_n \to y$ en $L^p(Q)$. Probemos que $y \in \Lambda(z_0)$.

Si $\varphi_n = \varphi(z_n, y_o, y_d)$, existe $v_n \in sgn(\varphi_n)\chi_q$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}y_n - \Delta y_n + g(z_n)y_n = \mid \varphi_n \mid_{L^1(q)} v_n\chi_\omega \text{ en } Q \\ y_n = 0 \text{ en } \Sigma \\ y_n(0) = y_0 \text{ en } \Omega \\ \mid y_n(T) - y_d \mid_p \leq \alpha. \end{cases} \tag{3.6}$$

Para continuar la demostración necesitamos el siguiente

Lema 3.7

$$z_n \to z_0 \ \textit{en} \ L^p(Q) \Rightarrow \varphi^0(z_n, y_0, y_d) \to \varphi^0(z_0, y_0.y_d) \ \textit{en} \ L^{p'}(\Omega). \qquad \square$$

Demostración: Ver [15]. ■

Fin de la demostración de la Proposición 3.6:

Por el lema anterior y la desigualdad (2.23)

$$\varphi_n \to \varphi(z_0, y_0, y_d) \text{ en } L^{p'}(Q).$$

lo que implica que

$$\mid \varphi_n \mid_{L^1(q)} \to \mid \varphi(z_0, y_0, y_d) \mid_{L^1(q)}$$

y

$$\varphi_n \to \varphi(z_0, y_0, y_d) \text{ c.t.p. en } \Omega$$

(despues de extraer una subsucesión).

De este modo, existe $v \in sgn(\varphi(z_0, y_0, y_d)\chi_q$ tal que

$$\begin{aligned} &v_n \rightharpoonup v \text{ débil-* en } L^\infty(q), \\ &v_n \to v \text{ c.t.p. en } Q. \end{aligned}$$

Ahora, si pasamos al límite en (3.6) se tiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}y - \Delta y + g(z_0)y = \mid \varphi(z_0, y_0, y_d) \mid_{L^1(q)} v\chi_\omega \text{ en } Q \\ y = 0 \text{ en } \Sigma \\ y(0) = y_0 \text{ en } \Omega \end{cases},$$

y como antes, debido al efecto regularizante de la ecuación del calor, $\mid y(T) - y_d \mid_p \leq \alpha$, deduciendose que $y \in \Lambda(z_0)$.

En definitiva, para todo $k \in L^{p'}(Q)$,

$$\sigma(\Lambda(z_n), k) = \int_Q k(t,x)y_n(t,x)dxdt \to \int_Q k(t,x)y(t,x)dxdt \leq$$

$$\leq \sup_{\overline{y} \in \Lambda(z_0)} \int_Q k(t,x)\overline{y}(t,x)dxdt = \sigma(\Lambda(z_0, k),$$

lo cual prueba que Λ es hemicontinua superiormente y termina la demostración de iii). ■

Teorema 3.8 *Si f cumple las hipótesis del teorema (3.2), existe $y \in L^p(Q)$ tal que $y \in \Lambda(y)$. Ademas es solución de (3.1) y demuestra el teorema (3.2).* □

Demostración: Si restringimos Λ a $conv(X)$($\equiv$ envoltura convexa de X), que sigue siendo un conjunto compacto en $L^p(\Omega)$, la aplicación resultante satisface las hipótesis del teorema de Kakutani, y por tanto Λ tiene un punto fijo $y \in conv(X)$. Ademas, por construcción, existirá $\varphi^0 \in L^{p'}(\Omega)$ y $v \in sgn(\varphi)\chi_q$ tal que

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi - \Delta\varphi + g(y)\varphi = 0 & \text{en } Q \\ \varphi = 0 & \text{en } \Sigma \\ \varphi(T) = \varphi^0 & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial}{\partial t}y - \Delta y + f(y) = \mid \varphi \mid_{L^1(q)} v\chi_\omega & \text{en } Q \\ y = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega \\ \mid y(T) - y_d \mid_p \leq \alpha. & \end{cases}$$

Por tanto y es la solución al problema planteado en este capítulo. ■

Observación 3.9 Argumentos de punto fijo son tambien utilizados en Díaz,J.I. [7] para mostrar la controlabilidad aproximada de una ecuación con un término multívoco que aparece en Climatología.

Capítulo 4

CONTROLABILIDAD APROXIMADA DE PROBLEMAS PARABOLICOS SEMILINEALES. CASO SUPERLINEAL.

4.1 Control sobre una parte del dominio.

Al contrario que en los casos lineal y sublineal, en el caso superlineal (salvo excepciones que comentaremos), no es posible alcanzar la controlabilidad aproximada. Veamos algunos ejemplos:

Proposición 4.1 *(Debido a A. Bamberger: vease Henry,J. [22]).*
Sea $\Omega =]0,1[$. Consideremos el problema

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \mid y \mid^{p-2} y = 0 & \text{en } Q \\ \dfrac{\partial}{\partial x} y(t,0) = v(t); \; y(t,1) = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(0,x) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Entonces, si $\Omega_\varepsilon = (\varepsilon, 1)$, $(0 < \varepsilon < 1)$, existe una constante C_ε (independiente de v) tal que

$$(4.2) \qquad \int_{\Omega_\varepsilon} \mid y(T,x) \mid^2 dx \leq C_\varepsilon$$

para todo $v \in L^2(0,T)$. $\square$

Demostración:
Sea ψ una funcion de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ con $\psi(x) > 0$ si $x \in \Omega$. Si multiplicamos (4.1) por $\psi(x)y(x)$ e integramos por partes sobre Q se obtiene:

$$\int_Q \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\psi(x) \mid y(t,x) \mid^2\right] dxdt + \int_Q \frac{\partial}{\partial x} y(t,x) \frac{\partial}{\partial x}(\psi(x)y(t,x))dxdt + \int_Q \psi(x) \mid y(t,x) \mid^p dxdt =$$

$$= -\int_0^T \psi(0)y(t,0)v(t)dt,$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \psi(x)\mid y(T,x)\mid^2 dx + \int_Q \psi(x)\mid \frac{\partial}{\partial x}y(t,x)\mid^2 dxdt + \int_Q \frac{d\psi(x)}{dx}y(t,x)\frac{\partial y(t,x)}{\partial x}dxdt +$$

$$+\int_Q \psi(x)\mid y(t,x)\mid^p dxdt = -\int_0^T \psi(0)y(t,0)v(t)dt.$$

Ademas por la desigualdad de Hölder, como

$$\frac{1}{2}+\frac{p-2}{2p}+\frac{1}{p}=1$$

se tiene que aplicando la desigualdad de Young,

$$\begin{aligned}
\mid \int_Q \frac{d\psi}{dx}y\frac{\partial y}{\partial x}dxdt\mid &= \mid \int_Q \psi^{\frac{1}{2}}\frac{\partial y}{\partial x}\psi^{(\frac{p-2}{2p}-1)}\frac{d\psi}{dx}\psi^{\frac{1}{p}}ydxdt\mid \\
&\le \left(\int_Q \psi\mid\frac{\partial y}{\partial x}\mid^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_Q \psi^{-\frac{p+2}{p-2}}\mid\frac{d\psi}{dx}\mid^{\frac{2p}{p-2}}dxdt\right)^{\frac{p-2}{2p}}\left(\int_Q \psi\mid y\mid^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \frac{1}{2}\int_Q \psi\mid\frac{\partial y}{\partial x}\mid^2 dxdt + \frac{1}{p}\int_Q \psi\mid y\mid^p dxdt + \frac{p-2}{2p}\int_Q \psi^{-\frac{p+2}{p-2}}\mid\frac{d\psi}{dx}\mid^{\frac{2p}{p-2}}dxdt,
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \psi\mid y(T,x)\mid^2 dx + \frac{1}{2}\int_Q \psi\mid\frac{\partial y}{\partial x}\mid^2 dxdt + (1-\frac{1}{p})\int_Q \psi\mid y\mid^p dxdt$$

$$-T\frac{p-2}{2p}\int_\Omega \psi^{-\frac{p+2}{p-2}}\mid\frac{d\psi}{dx}\mid^{\frac{2p}{p-2}}dxdt \le -\int_0^T \psi(0)y(t,0)v(t)dt,$$

deduciendose que

$$\int_\Omega \psi\mid y(T,x)\mid^2 dx \le -2\int_0^T \psi(0)y(t,0)v(t)dt + T\frac{p-2}{2p}\int_\Omega \psi^{-\frac{p+2}{p-2}}\mid\frac{d\psi}{dx}\mid^{\frac{2p}{p-2}}dx.$$

Eligiendo ahora ψ tal que

$$\begin{cases} \begin{cases} \psi(x)=x^\beta+o(x^\beta) \\ \dfrac{d\psi}{dx}=\beta x^{\beta-1}+o(x^{\beta-1}) \end{cases} & \text{cuando } x\to 0 \\ \psi(x)=1 & \text{sobre } (\varepsilon,1) \end{cases}$$

entonces

$$\psi^{-\frac{p+2}{p-2}}\mid\frac{d\psi}{dx}\mid^{\frac{2p}{p-2}} = x^{-\beta\frac{p+2}{p-2}+(\beta-1)\frac{2p}{p-2}} + o(x^{-\beta\frac{p+2}{p-2}+(\beta-1)\frac{2p}{p-2}}).$$

Tal función está acotada cuando $x\to 0$ si

$$-\beta\frac{p+2}{p-2}+(\beta-1)\frac{2p}{p-2}>0,$$

para lo que basta elegir $\beta>\frac{2p}{p-2}$, con lo que estará acotada sobre todo Ω.

Finalmente, como $\psi(0)=0$ se deduce (4.2).

■

Observación 4.2 *Es claro que (4.2) muestra que el problema (4.1) no es controlable aproximadamente.*

Proposición 4.3 *(vease Díaz,J.I. [8])*
El problema

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + |y|^{p-1}y = 0 & en\ Q \\ y(t,x) = v(t,x) & en\ \Sigma \\ y(0,x) = y_0 & en\ \Omega, \end{array}$$

con $v \in X \equiv \{$ espacio de trazas para el que existe una solución del problema $\}$, no satisface la propiedad de controlabilidad aproximada en el caso de $p > 1$. □

Demostración:
Probaremos que existe $c = c(p,n)$ tal que

$$u(t,x) \le c(p,n)\left(\frac{1}{d(x)} + \frac{1}{t^{\frac{\theta}{2}}}\right),\ \forall\ (t,x) \in Q, \tag{4.3}$$

donde $\theta = \frac{2}{p-1}$ y $d(x)$ denota la distancia de x a la frontera de Ω (por supuesto, esto acaba la demostración). Seguiremos, por ejemplo, la demostración de (4.3) dada en Kamin,S.-Peletier,L.A.-Vazquez,J.L. [23].

En efecto, sea $x_0 \in \Omega,\ t_0 \in (0,T]$ y $k = \frac{d^2(x_0)}{t_0}$. Consideremos en

$$S = \{(t,x) \in Q :\ |x - x_0|^2 < kt,\ 0 < t \le t_0\},$$

la función

$$U(t,x) = \frac{C}{(kt - r^2)^\theta} (= C(kt.(x-x_0)^2)^{-\theta}),$$

con $r = |x - x_0|$ y C una constante que despues elegiremos. Mostremos que para C suficientemente grande, $U \ge u$ en S.

En primer lugar, $U = \infty$ sobre la frontera parabólica de S. Ademas si denotamos (por comodidad) $\omega = kt - r^2$, tenemos que

$$\begin{aligned} L(U) &\equiv U_t - \Delta U + U^p \\ &= -kC\theta\omega^{-(\theta+1)} + div[2\theta C\omega^{-(\theta+1)}(x_i - \vec{x}_{0,i})_i] + C^p\omega^{-\theta p} \\ &= -kC\theta\omega^{-(\theta+1)} + \sum_{i=1}^n [4\theta C(\theta+1)\omega^{-(\theta+2)}(x_i - x_{0,i})^2] + \sum_{i=1}^n [2\theta C\omega^{-(\theta+1)}] + C^p\omega^{-\theta p} \\ &= -kC\theta\omega^{-(\theta+1)} + 4\theta C(\theta+1)r^2\omega^{-(\theta+2)} + 2n\theta C\omega^{-(\theta+1)} + C^p\omega^{-\theta p}. \end{aligned}$$

De este modo, si se cumplen las desigualdades

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}C^{p-1} \ge 4\theta(\theta+1)r^2 \\ \frac{1}{3}C^{p-1} \ge 2n\theta\omega \\ \frac{1}{3}C^{p-1} \ge k\theta\omega, \end{array} \right. \tag{4.4}$$

se tiene que $L(U) \ge 0$. Ahora, puesto que $r^2, \omega \le d^2(x_0) = kt_0$, (4.4) se cumple si

$$C = c(p,n)[d(x_0)^\theta + k^{\frac{1}{p-1}} d(x_0)^{\frac{2}{p-1}}].$$

Entonces, aplicando el principio de comparación entre u y U se llega a que

$$u(t_0,x_0) \leq U(t_0,x_0) = \frac{C}{(kt_0)^\theta} = c(p,n)\frac{d(x_0)^\theta + k^{\frac{1}{p-1}} d(x_0)^\theta}{(kt_0)^\theta} =$$

$$= c(p,n)\left[\frac{1}{d(x_0)^\theta} + \frac{k^\theta t_0^{\frac{1}{p-1}}}{(kt_0)^\theta}\right] = c(p,n)\left[\frac{1}{d(x_0)^\theta} + \frac{1}{t_0^{\frac{\theta}{2}}}\right]$$

(en realidad tal proceso pasa por aproximar Ω por $\Omega_n \to \Omega$, comparar u y U en $Q_n = (0,T)\times\Omega_n$ y pasar al límite cuando $n \to \infty$. Este tipo de cosas puede verse con más detalle en Díaz,G.-Letelier,R. [5]).

■

4.2 Control sobre todo el dominio.

Cuando el control se ejecerce sobre todo el dominio es posible dar una respuesta afirmativa a la controlabilidad aproximada para cualquier función continua f (vease Díaz,J.I.-Fursikov,A.V. [11] y Henry,J. [22]). Aquí presentaremos un resultado más fuerte dando información sobre el signo de los controles.

Teorema 4.4 *(Díaz,J.I.-Henry,J.-Ramos,A.M. [13])*

Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función monótona no decreciente tal que $f(0) \geq 0$ y Ω un abierto acotado regular. Para cada $v \in L^2(Q)$ denotamos por $y(v)$ a la solución de

$$\text{(4.5)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} y - \Delta y + f(y) = v & \text{en } Q \\ y(x,t) = 0 & \text{en } \Sigma \\ y(\cdot,0) = 0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Sea $y_d \in L^2_+(\Omega)$, y X un conjunto denso en $L^2_+(Q)$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe $v_\varepsilon \in X$ tal que $\| y(T;v) - y_d \|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$. □

Demostración: Sean $y_d \in L^2_+(\Omega)$, $\varepsilon > 0$. Consideremos el problema lineal

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial t} - \Delta Y = z_\varepsilon & \text{en } Q \\ Y(x,t) = 0 & \text{en } \Sigma \\ Y(x,0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $z_\varepsilon \in X$ tal que

$$\| Y(T,z_\varepsilon) - y_d \|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon$$

(esto se puede hacer segun lo visto en la Proposición 2.6).

Consideremos $\overline{z_\varepsilon} \in L^\infty_+(Q)$ suficientemente próximo a z_ε (en $\|\cdot\|_{L^2(Q)}$) de forma que

$$\| Y(T,z_\varepsilon) - Y(T,\overline{z_\varepsilon}) \|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

Como $\overline{z_\varepsilon} \in L^\infty_+(Q)$, se tiene que $Y(\overline{z_\varepsilon}) \in L^\infty_+(Q)$ y por tanto

$$f(Y(\overline{z_\varepsilon})) \in L^\infty_+(Q) \subset L^2_+(Q).$$

Denotemos por $\tilde{y}$ a la solución de:

$$(4.6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta \tilde{y} + f(Y(\overline{z_\varepsilon}) + \tilde{y}) = v_\varepsilon + z_\varepsilon - \overline{z_\varepsilon} & \text{en } Q \\ \tilde{y}(0,x) = 0 & \text{en } \Omega \\ \tilde{y}(t,x) = 0 & \text{en } \Sigma, \end{cases}$$

con $v_\varepsilon \in X$ tal que $\| v_\varepsilon - f(Y(\overline{z_\varepsilon})) \|_{L^2(Q)} < \varepsilon$.

Entonces $y = Y(\overline{z_\varepsilon}) + \tilde{y}$ es solucion de (4.5) (recuerdese que $v_\varepsilon + z_\varepsilon \in X$). Ademas, si multiplicamos en (4.6) por $\tilde{y}$ e integramos sobre $[0,T]$ obtenemos:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\, \tilde{y}(T) \,|^2 \, dx + \int_Q |\, \nabla \tilde{y} \,|^2 \, dxdt = \int_Q (z_\varepsilon - \overline{z_\varepsilon})\tilde{y} dxdt + \int_Q (v_\varepsilon - f(Y(\overline{z_\varepsilon})))\tilde{y} +$$

$$\int_Q [f(Y(\overline{z_\varepsilon})) - f(Y(\overline{z_\varepsilon}) + \tilde{y})]\tilde{y} dxdt \leq \| z_\varepsilon - \overline{z_\varepsilon} \|_{L^2(Q)} \| \tilde{y} \|_{L^2(Q)} + \| v_\varepsilon - f(Y(\overline{z_\varepsilon})) \|_{L^2(Q)} \| \tilde{y} \|_{L^2(Q)} .$$

Ahora, si se aplica la desigualdad de Poincaré en el primer término y la desiguladad de Young con peso en el último, se deduce que

$$\int_\Omega |\, \tilde{y}(T) \,|^2 \, dx = \| \tilde{y}(T) \|^2_{L^2(Q)} \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Finalmente se deduce que

$$\| y(T) - y_d \| \leq \| Y(\overline{z_\varepsilon})(T) - Y(z_\varepsilon)(T) \| + \| Y(z_\varepsilon)(T) - y_d \| + \| \tilde{y}(T) \| \stackrel{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0. \quad \blacksquare$$

Observación 4.5 Una demostración de la anterior conclusión para f meramente Lipschitziana (y no necesariamente monótona) puede encontrarse en Díaz,J.I.-Henry,J.-Ramos,A.M. [13].

Capítulo 5

ALGUNAS CUESTIONES ALTERNATIVAS EN CASO DE NO CONTROLABILIDAD APROXIMADA.

En este capítulo trataremos la no controlabilidad aproximada de la ecuación de Burgers mediante el método desarrollado en Fursikov,A.V.-Imanuvilov,A.Yu. [20].

5.1 La no controlablilidad aproximada de la ecuación de Burgers.

5.1.1 Estimación principal.

Consideremos la ecuación de Burgers:

$$\frac{\partial}{\partial t}y(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(t,x) + y(t,x)\frac{\partial}{\partial x}y(t,x) = u(t,x),\ x \in (0,a),\ t \in (0,T), \tag{5.1}$$

donde $a > 0$ y $T > 0$ son numeros fijos aunque arbitrarios, junto con las condiciones de frontera y valor inicial:

$$y(t,0) = y(t,a) = 0,\ y(0,x) = 0,\ x \in (0,a),\ t \in (0,T). \tag{5.2}$$

Para los controles supondremos que $u(t,x) \in L^2([0,T] \times [0,a])$, junto con

$$supp\ u(t,x) \subset (b,c),\ \forall\ t \in (0,T);\ \text{con } 0 < b < c < a. \tag{5.3}$$

Se sabe (Vease Ladyzenskaja,O.A.-Solonnikov,V.A.-Ural'ceva,N.N. [25]) que si u está en las condiciones anteriores, existe una única solución $y(t,x) \in L^2(0,T;W^{2,2}(0,a))$ del problema (5.1), (5.2). Utilizando este hecho y la ecuación (5.1), se deduce que en estas condiciones, $\frac{\partial}{\partial t}y(t,x) \in L^2((0,T) \times (0,a))$.

Para observar la no controlabialidad aproximada de este problema, es posible aplicar estimaciones similares a las de la Proposición 4.3 (vease Díaz,J.I. [8]). Sin embargo, utilizaremos un método de energía que desarrollamos a continuación.

Lema 5.1 *Sea $u \in L^2((0,T)\times(0,a))$ satisfaciendo (5.3), e $y(t,x)$ una solución del problema (5.1), (5.2). Si $y_+(t,x) = \max\{y(t,x),0\}$, entonces para $m > 5$ se tiene la estimación:*

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^b (b-x)^m y_+^4(t,x)dx < \alpha(m)b^{m-5}, \tag{5.4}$$

donde b es la constante dada en (5.3) y $\alpha(m) > 0$ es una constante que depende solo de m.

Demostración:

Multiplicamos ambas caras de (5.1) por $(b-x)^m y_+^3(t,x)$, e integramos respecto de x sobre el intervalo $(0,b)$, obteniendo:

$$\int_0^b (b-x)^m(\frac{\partial}{\partial t}y)y_+^3dx + \int_0^b (b-x)^m 3y_+^2(\frac{\partial}{\partial x}y_+)(\frac{\partial}{\partial x}y)dx - \int_0^b m(b-x)^{m-1}y_+^3\frac{\partial}{\partial x}ydx +$$

$$+\int_0^b (b-x)^m y_+^4\frac{\partial}{\partial x}ydx = 0.$$

Por los teoremas sobre regularidad de la ecuación de Burgers (vease Ladyzenskaja,O.A.-Solonnikov,V.A.-Ural'ceva,N.N. [24]), se tiene que $y(t,x) \in C((0,T)\times(0,a))$. Si ahora $y_- = \min\{y,0\}$, entonces:

$$y_+^3\frac{\partial}{\partial t}y = y_+^3(\frac{\partial}{\partial t}y_+ + \frac{\partial}{\partial t}y_-) = y_+^3\frac{\partial}{\partial t}y_+ = \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial t}y_+^4.$$

De forma análoga:

$$y_+^2\frac{\partial y_+}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} = y_+^2(\frac{\partial y_+}{\partial x})^2,\ \ y^k\frac{\partial y_+}{\partial x} = \frac{1}{k+1}\frac{\partial y_+^{k+1}}{\partial x}.$$

Usando estas igualdades y la integración por partes se deduce que:

$$\int_0^b \frac{(b-x)^m}{4}\frac{\partial}{\partial t}y_+^4dx + \int_0^b (b-x)^m 3y_+^2(\frac{\partial}{\partial x}y_+)^2dx - \int_0^b \frac{m(m-1)}{4}(b-x)^{m-2}\frac{\partial}{\partial x}y_+^4dx + \tag{5.5}$$

$$+\int_0^b \frac{m}{5}(b-x)^{m-1}y_+^5dx = 0.$$

A continuación, utilizando la desigualdad de Hölder con los exponentes conjugados 5 y $\frac{5}{4}$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^b (b-x)^{m-2}y_+^4dx &= \int_0^b (b-x)^{\frac{m-6}{5}}(b-x)^{\frac{4(m-1)}{5}}y_+^4dx \\ &\le (\int_0^b (b-x)^{m-6}dx)^{\frac{1}{5}}(\int_0^b (b-x)^{m-1}y_+^5dx)^{\frac{4}{5}} \\ &= \frac{b^{\frac{m-5}{5}}}{(m-5)^{\frac{1}{5}}}(\int_0^b (b-x)^{m-1}y_+^5dx)^{\frac{4}{5}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Por otro lado, utilizando la desigualdad de Young,

$$\frac{m}{5}\int_0^b (b-x)^{m-1}y_+^5dx - \frac{m(m-1)}{4(m-5)^{\frac{1}{5}}}b^{\frac{(m-5)}{5}}(\int_0^b (b-x)^{m-1}y_+^5dx)^{\frac{4}{5}} \ge -\alpha(m)b^{m-5}, \tag{5.7}$$

donde $\alpha(m)$ es una constante positiva (debido a que $m > 5$) que depende solo de m.

Por último, sustituyendo (5.6), (5.7) en (5.5), se obtiene la estimación del lema.

■

5.1.2 Resultados de no controlabilidad aproximada.

Teorema 5.2 *Fijado $T > 0$, un número finito arbitrario, el problema (5.1), (5.2) no es $L^2(0,a)$-controlable aproximadamente respecto al conjunto de controles $u \in L^2((0,T)\times(0,a))$ satisfaciendo (5.3).* $\square$

Demostración:
Sea $y_d(x) \in L^2(0,a)$, $y_d(x) \geq 0$, e $y(x)$ una solución del problema (5.1), (5.2). Entonces,

$$(5.8) \qquad (\int_0^a \mid y_d(x) - y(T,x) \mid^2 dx)^{\frac{1}{2}} \geq (\int_0^{\frac{b}{2}} \mid y_d(x) - y(T,x) \mid^2 dx)^{\frac{1}{2}} \geq$$

$$\begin{aligned}
\geq & \left(\int_{\{x\in(0,\frac{b}{2}):\ y(T,x)\geq 0\}} \mid y_d(x) - y_+(T,x) \mid^2 dx + \int_{\{x\in(0,\frac{b}{2}):\ y(T,x)\leq 0\}} \mid y_d(x) - y_-(T,x) \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
\geq & \left(\int_{\{x\in(0,\frac{b}{2}):\ y(T,x)\geq 0\}} \mid y_d(x) - y_+(T,x) \mid^2 dx + \int_{\{x\in(0,\frac{b}{2}):\ y(T,x)\leq 0\}} \mid y_d(x) \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
= & \left(\int_0^{\frac{b}{2}} \mid y_d(x) - y_+(T,x) \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \parallel y_d - y_+(T,\cdot) \parallel_{L^2(0,\frac{b}{2})} \\
\geq & \parallel y_d \parallel_{L^2(0,\frac{b}{2})} - \parallel y_+(T,\cdot) \parallel_{L^2(0,\frac{b}{2})} .
\end{aligned}$$

Ahora, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene:

$$(5.9) \qquad \begin{aligned}
\parallel y_+(T,\cdot) \parallel_{L^2(0,\frac{b}{2})} &= \left(\int_0^{\frac{b}{2}} (b-x)^{-\frac{m}{2}} (b-x)^{\frac{m}{2}} \mid y_+(T,x) \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^{\frac{b}{2}} (b-x)^{-m} dx \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^{\frac{b}{2}} (b-x)^m \mid y_+(T,x) \mid^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= (\frac{b^{1-m}(2^{m-1}-1)}{m-1})^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^{\frac{b}{2}} (b-x)^m \mid y_+(T,x) \mid^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} .
\end{aligned}$$

Ademas, integrando sobre $(0,T)$ la estimación (5.4), se obtiene la desigualdad:

$$(5.10) \qquad \int_0^b (b-x)^m \mid y_+(T,x) \mid^4 dx \leq T\alpha(m) b^{m-5}.$$

De este modo, si elegimos $y_d(x) \in L^2(0,a)$ satisfaciendo la condición

$$(5.11) \qquad \parallel y_d \parallel_{L^2(0,\frac{b}{2})} > \left(\frac{b^{1-m}(2^{m-1}-1)}{m-1} T\alpha(m) b^{m-5} \right)^{\frac{1}{4}} + 1,$$

y tenemos en cuenta (5.8)-(5.11), se concluye que para cualquier control $u \in L^2((0,T)\times(0,a))$ satisfaciendo (5.3), la solución y del problema (5.1), (5.2), cumple

$$\parallel y_d - y(T,\cdot) \parallel_{L^2(0,a)} > 1.$$

Obviamente, esta última desigualdad acaba la demostración. $\blacksquare$

Consideremos ahora la ecuación de Burgers con control sobre la frontera:

$$(5.12) \qquad \frac{\partial}{\partial t} y(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(t,x) + y(t,x) \frac{\partial}{\partial x} y(t,x) = 0,\ x \in (0,a),\ y \in (0,T)$$

$$(5.13) \qquad y(t,0) = 0,\ y(t,a) = u(t).$$

Teorema 5.3 *El problema (5.12), (5.13) no es $L^2(0,a)$-controlable aproximadamente respecto al espacio de controles $L^2(0,T)$ para cualquier $T>0$ fijo.* $\square$

Demostración:
De manera análoga a lo hecho en el lema 5.1, las soluciones y del problema (5.12), (5.13), verifican la estimación (5.4), con la que repitiendo los pasos de la demostración del teorema 5.2, se concluye el resultado. $\blacksquare$

5.2 Puntos de alcanzabilidad estables de la ecuación de Burgers.

En el capítulo anterior se ha probado la no controlabilidad aproximada de la ecuación de Burgers. Esto mismo sucedía en ecuaciones semilineales superlineales. Debido a esto, parece conveniente considerar nuevas cuestiones relativas a la controlabilidad de este tipo de problemas. Consideremos la ecuación de Burgers

$$\frac{\partial}{\partial t}y(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}y(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}y^2(t,x) = 0,\ x\in(0,a),\ t>0, \tag{5.14}$$

con control sobre la frontera

$$y(t,0)=u_0(t),\ y(t,a)=u_1(t), \tag{5.15}$$

y condición inicial

$$y(0,x)=y_0(x), \tag{5.16}$$

donde $y_0(x)\in L^2(0,a)$ es una función dada.

Definición 5.4 *Una función $y_d(x)\in L^2(0,a)$ se dice que es <u>una función de alcanzabilidad estable</u> para la ecuación de Burgers con control sobre la frontera, si para cualquier condición inicial $y_0(x)\in L^2(0,a)$, existen $T=T(y_0)>0$ y controles $u_j(t)\in L^2_{Loc}(I\!R_+)$ $(j=0,1)$, tales que la solución $y(t,x)$ del problema (5.14)-(5.16), satisface:*

$$\| y(t,\cdot) - y_d \|_{L^2(0,a)} \equiv 0 \ \forall\ t>T(y_0). \qquad \square$$

Esta definición es demasiado "fuerte", y conviene "debilitarla" de la siguiente manera:

Definición 5.5 *Una función $y_d(x)\in L^2(0,a)$ se dice que es <u>una función de alcanzabilidad aproximadamente estable</u> para la ecuación de Burgers con control sobre la frontera, si para cualquier condición inicial $y_0(x)\in L^2(0,a)$, existen controles $u_j(t)\in L^2_{Loc}(I\!R_+)$ $(j=0,1)$, tales que la solución del problema (5.14)-(5.16) satisface las condiciones:*

$$\| y(t,\cdot) - y_d \|_{L^2(0,a)} \to 0,\ \text{cuando } t\to\infty, \tag{5.17}$$

$$\forall\ \varphi\in C_c^\infty(0,a),\ \int_0^a \frac{\partial}{\partial t}y(t,x)\varphi(x)dx \to 0,\ \text{cuando } t\to\infty. \qquad \square \tag{5.18}$$

Describamos en primer lugar, el conjunto de puntos de alcanzabilidad aproximadamente estables, de la ecuación de Burgers con control sobre la frontera.

Supongamos que $y_d(x) \in L^2(0,a)$ es un punto de alcanzabilidad aproximadamente estable, y que $y(t,x)$ es la solución de la ecuación de Burgers cumpliendo (5.17), (5.18). Sea $\omega(t,x) = y(t,x) - y_d(x)$. Multiplicando en (5.14) por $\varphi \in C_c^\infty(0,a)$ e integrando sobre $(0,a)$ se tiene:

$$\int_0^a [-\frac{\partial^2}{\partial x^2} y_d(x) + \frac{\partial}{\partial x} y_d^2(x)]\varphi(x)dx = \int_0^a [-\frac{\partial}{\partial t}\omega(t,x)\varphi(x) + \omega(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) + \tag{5.19}$$

$$+(2y_d(x)\omega(t,x) + \omega^2(t,x))\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)]dx.$$

Ahora, si pasamos al límite en (5.19), teniendo en cuenta (5.17), (5.18), y que se cumple para cualquier función $\varphi \in C_c^\infty(0,a)$, obtenemos que

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} y_d(x) + \frac{\partial}{\partial x} y_d^2(x) = 0. \tag{5.20}$$

De esta manera, hemos probado el siguiente resultado:

Lema 5.6 *Si $y_d(x)$ es un punto de alcanzabilidad aproximadamente estable, para la ecuación de Burgers con control sobre la frontera, entonces $y_d(x)$ satisface la ecuación (5.20).* □

A continuación, si escribimos

$$y_d(0) = \alpha_1, \; y_d(a) = \alpha_2, \tag{5.21}$$

mostraremos que cualquier solución del problema (5.20), (5.21), con $\alpha_1, \; \alpha_2$ finitos, es un punto de alcanzabilidad aproximadamente estable. Para ello resolvamos primero el problema (5.20), (5.21).

Lema 5.7 *Para cualquier $\alpha_1, \; \alpha_2$ finitos, cumpliendo $\alpha_1 \leq \alpha_2$ y $a\alpha_1\alpha_2 > -\frac{\pi}{2}$, existe una única solución del problema (5.20), (5.21). Ademas,*

$$\text{si } \alpha_2 - \alpha_1 > a\alpha_1\alpha_2, \quad \text{entonces} \quad y_d(x) = \sqrt{c} \;\; tg(\sqrt{c}(x+d)), \tag{5.22}$$

$$\text{si } \alpha_2 - \alpha_1 = a\alpha_1\alpha_2, \quad \text{entonces} \quad y_d(x) = \frac{-1}{(x+d)}, \tag{5.23}$$

$$\text{si } \alpha_2 - \alpha_1 < a\alpha_1\alpha_2, \quad \text{entonces} \quad y_d(x) = -\sqrt{c} \;\; cth(\sqrt{c}(x+d)), \tag{5.24}$$

donde las constantes c, d son determinadas unívocamente por α_1, α_2.

Por último, si $\alpha_1 > \alpha_2$ ó $a\alpha_1\alpha_2 \leq -\frac{\pi}{2}$, entonces el problema (5.20), (5.21) no tiene solución.
□

Demostración:

Integrando (5.20) una vez se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} y_d = y_d^2 + c. \tag{5.25}$$

Si $c > 0$ podemos escribir esto como

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x} y_d = (\frac{y_d}{\sqrt{c}})^2 + 1,$$

con lo que integrando de nuevo, se obtiene:

$$\frac{1}{\sqrt{c}} arctg(\frac{y_d}{\sqrt{c}}) = x + d, \tag{5.26}$$

o lo que es lo mismo,

$$y_d(x) = \sqrt{c} \;\; tg(\sqrt{c}(x + d)).$$

Veamos que las constantes $c > 0$ y d de esta igualdad, están determinadas unívocamente por α_1 y α_2. Utilizando (5.21), (5.26), se tiene que

$$a\sqrt{c} = arctg(\frac{\alpha_2}{\sqrt{c}}) - arctg(\frac{\alpha_1}{\sqrt{c}}),$$

y utilizando la fórmula:

$$tg(f - g) = \frac{tg(f) - tg(g)}{1 + tg(f)tg(g)},$$

se deduce que

$$tg(a\sqrt{c}) = \frac{\sqrt{c}(\alpha_2 - \alpha_1)}{(c + \alpha_1\alpha_2)}.$$

Ahora, resolviendo esta ecuación (p.e. por medio de gráficas), se tiene que si $\alpha_1,\ \alpha_2$ satisfacen la condición de (5.22), existe una única solución positiva c de esta ecuación, y con ella una única constante d.

Si $c = 0$, entonces integrando en (5.25) se tiene que

$$y_d(x) = \frac{-1}{(x + d)},$$

y es fácil comprobar que se cumple la condición $\alpha_2 - \alpha_1 = a\alpha_1\alpha_2$, con lo que se prueba (5.23).

Si $c < 0$, las reglas de integración sobre (5.25) nos dan

$$\frac{y_d - \sqrt{c_1}}{y_d + \sqrt{c_1}} = e^{2\sqrt{c_1}(x+d)}, \text{ es decir } y_d(x) = -\sqrt{c_1}cth(\sqrt{c_1}(x + d)),$$

donde $c_1 = -c$. Entonces, si llamamos $\gamma = \sqrt{c_1}$, aplicando (5.21) se tiene que

$$\frac{\alpha_2 - \gamma}{\alpha_2 + \gamma} = e^{2\gamma a} \cdot e^{2\gamma d}, \;\; \frac{\alpha_1 - \gamma}{\alpha_1 + \gamma} = e^{2\gamma d},$$

con lo que multiplicando la primera igualdad por la inversa de la segunda queda:

$$\frac{(\alpha_2 - \gamma)(\alpha_1 + \gamma)}{(\alpha_2 + \gamma)(\alpha_1 - \gamma)} = e^{2\gamma a}.$$

Ahora, resolviendo esta ecuación, se puede probar que tiene una única solución $\gamma > 0$ (con la que tambien deducimos la constante d) si $\alpha_1,\ \alpha_2$ están en las condiciones de (5.24).

Los argumentos anteriores nos prueban el resultado del lema sobre no existencia de solución.

■

Teorema 5.8 *Sean $\alpha_1,\ \alpha_2 \in I\!R$ satisfaciendo las condiciones: $\alpha_2 \geq \alpha_1,\ a\alpha_1\alpha_2 > -\frac{\pi}{2}$; e y_d solución del problema (5.20), (5.21). Entonces, $y_d(x)$ es una función de alcanzabilidad aproximadamente estable, que se puede aproximar por la solución $y(t,x)$ del problema (5.14)-(5.16), con control $u_0(t) \equiv \alpha_1,\ u_1(t) \equiv \alpha_2$. Ademas, si $\omega(t,x) = y(t,x) - y_d(x)$, se cumple:*

$$\| \omega(y,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} \leq e^{-\lambda t} \| y_0 - y_d \|^2_{L^2(0,a)} \quad (\lambda > 0),$$

$$\int_0^\infty \| \frac{\partial}{\partial x}\omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)}\, dt \leq \frac{1}{2} \| y_0 - y_d \|^2_{L^2(0,a)} \cdot \qquad \Box$$

Demostración:

Sea $y(t,x)$ la solución de (5.14)-(5.16) con $u_0(t) = \alpha_1,\ u_1(t) = \alpha_2$. Utilizando (5.20), deducimos que $\omega(t,x)$ es solución del problema

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\omega + 2\frac{\partial}{\partial x}(\omega y_d) + \frac{\partial}{\partial x}\omega^2 = 0, \tag{5.27}$$

$$\omega(t,0) = \omega(t,a) = 0,\ \omega(0,x) = y_0(x) - y_d(x). \tag{5.28}$$

Si multiplicamos en (5.27) por $\omega(t,x)$, integramos sobre $(0,a)$ y tenemos en cuenta (5.28), queda:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} + \| \frac{\partial}{\partial x}\omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} + 2\int_0^a \omega^2 \frac{\partial}{\partial x}(y_d)dx + \\
&+ 2\int_0^a 2y_d \frac{\partial}{\partial x}(\omega)\omega dx + \int_0^a \omega \frac{\partial}{\partial x}(\omega^2)dx = \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} + \| \frac{\partial}{\partial x}\omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} + \int_0^a \omega^2 \frac{\partial}{\partial x}(y_d)dx + \int_0^a \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}(\omega^3)dx = \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} + \| \frac{\partial}{\partial x}\omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} + \int_0^a \omega^2 \frac{\partial}{\partial x}(y_d)dx = 0. \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

Consideremos λ_1 el mínimo autovalor del problema espectral:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x) + (\frac{\partial}{\partial x}y_d(x))v(x) = \lambda v(x),\ v(0) = v(a) = 0. \tag{5.30}$$

Entonces como $\frac{\partial}{\partial x}y_d(x) \geq 0$ (basta utilizar el lema 5.7), se tiene que $\lambda_1 > 0$ (basta multiplicar en (5.30) por $v(x)$ e integrar sobre $(0,a)$). Ahora, utilizando (5.29),

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| \omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} + \lambda_1 \| \omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} \leq 0,$$

con lo que,

$$\frac{d}{dt} \| \omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} \leq -2\lambda_1 \int_0^t \frac{d}{dt} \| \omega(s,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)}\, ds - 2\lambda_1 \| y_0 - y_d \|^2_{L^2(0,a)},$$

y aplicando el lema de Gronwall (vease por ejemplo la pag. 27 de Haraux,A.[21]) se tiene que

$$\frac{d}{dt} \| \omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} \leq -2\lambda_1 \| y_0 - y_d \|^2_{L^2(0,a)}\ e^{-2\lambda_1 t},$$

con lo que integrando,

$$\| \omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} \leq \| y_0 - y_d \|^2_{L^2(0,a)}\ e^{-2\lambda_1 t}.$$

Ademas, si en (5.29) utilizamos el hecho de que $\int_0^a \omega^2 \frac{\partial}{\partial x}(y_d)dx \geq 0$, integramos sobre $(0,a)$ y hacemos $t \to \infty$, obtenemos la última desigualdad del teorema.

Veamos por último que se cumple (5.18). Multiplicando en (5.27) por $\varphi \in C_c^\infty(0,a)$, e intregrando sobre $(0,a)$ queda:

$$\int_0^a \frac{\partial}{\partial t} y(t,x)\varphi(x)dx = \int_0^a \omega \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi dx + 2\int_0^a \omega y_d \frac{\partial}{\partial x}\varphi dx + \int_0^a \omega^2 \frac{\partial}{\partial x}\varphi dx \leq$$

$$\leq \| \omega(t,\cdot) \|_{L^2(0,a)} \| \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi \|_{L^2(0,a)} + 2 \| \omega(t,\cdot) \|_{L^2(0,a)} \| y_d \frac{\partial}{\partial x}\varphi \|_{L^2(0,a)} +$$

$$+ \| \omega(t,\cdot) \|^2_{L^2(0,a)} \| \frac{\partial}{\partial x}\varphi \|_{L^\infty(0,a)} \overset{t\to\infty}{\to} 0. \quad \blacksquare$$

Estudiemos ahora, las funciones de alcanzabilidad estables de la ecuación de Burgers, con control sobre la frontera. Para ello necesitamos un resultado auxiliar previo:

Sea $y_d(t,x) \in W_1^{2,2}((0,T)\times(0,a)) = \{y \in L^2(0,T;W^{2,2}(0,a)) : \ \partial_t y \in L^2(Q)\}$ una solución de la ecuación (5.14), y $B_r(y_0) = \{z(x) \in W^{1,2}(0,a) : \quad \| z - y_0 \|_{W^{1,2}(0,a)} < r\}$. Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 5.9 *Dado $T > 0$, si $r > 0$ es suficientemente pequeño, entonces, para todo $z_0(x) \in B_r(y_d(0,x))$, existe una solución $z(t,x) \in W_1^{2,2}((0,T)\times(0,a))$ de la ecuación (5.14), que satisface las condiciones:*

$$z(0,x) = z_0(x),\ z(t,0) = u_0(t),\ z(t,a) = u_1(t),\ (u_0,\ u_1 \ \textit{a determinar}),$$

y cumple:

$$z(T,x) = y_d(T,x). \quad \square$$

Demostración: Vease el teorema 5.1 de Fursikov,A.V.-Imanuvilov,O.Yu. [20], donde de hecho se demuestra un caso más general.

$\blacksquare$

Teorema 5.10 *Sean $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$, tales que $\alpha_2 \geq \alpha_1$ y $a\alpha_1\alpha_2 > -\frac{\pi}{2}$. Sea por otro lado, $y_d(x)$ una solución de (5.20), (5.21). Entonces, $y_d(x)$ es una función de alcanzabilidad estable para la ecuación de Burgers con control sobre la frontera.* $\square$

Demostración:

Sea $y(t,x)$ la solución del problema (5.14)-(5.16), con $u_0(t) = \alpha_1,\ u_1(t) = \alpha_2$. Aplicando el teorema 5.8, se tiene que dado $r > 0$, arbitrario, existe $t_0 > 0$ tal que

$$\| \omega(t_0,x) \|_{W^{1,2}(0,a)} = \| y(t_0,x) - y_d(x) \|_{W^{1,2}(0,a)} < r.$$

Si aplicamos ahora el teorema 5.9 con $y_d(t,x) = y_d(x),\ z_0(x) = y(t_0,x)$, a traves de una correcta elección de los controles de frontera $u_0\ u_1$, es posible hacer que la correspondiente solución $z(t,x)$ cumpla $z(T,x) = y_d(x)$.

$\blacksquare$

Observación 5.11 Resultados de una naturaleza similar para la ecuación semilineal superlineal son el objeto principal del trabajo Díaz,J.I.-Fursikov,A.V.-Ramos,A.M. [12].

Bibliografía

[1] **Alekseev,V.M.-Tikhomirov,V.M.-Fomin,S.V.**:*Optimal control*. Consultants Nureau, New-York, London (1987).

[2] **Aubin,J.P.**: *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques*. Masson (1984).

[3] **Aubin,J.P.-Ekeland,I.**: *Applied nonlinear Analysis*. Wiley-Interscience publication (1984).

[4] **Brézis,H.**:*Analyse Fonctionnelle: Théorie et applications*. Masson (1987).

[5] **Díaz,G.-Letelier,R.**: *Explosive solutions of quasilinear elliptic equations: existence and uniqueness*. Nonlinear Analysis. Theorie, Methods and Applications. Vol. 20.N 2, pp. 97-125 (1993).

[6] **Díaz,J.I.**: *On the Controllability in some simple climate models*. En el libro "Environment, economics and their mathematical models (ed. J.I.Díaz y J.L.Lions). Actas del curso de verano de la U.C.M. Almería (Julio-1992). Aparecerá en Massón.

[7] **Díaz,J.I.**: *Sobre la controlabilidad aproximada de problemas no lineales disipativos*. Actas de "Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos". Universidad de Malaga (Octubre-1990).

[8] **Díaz,J.I.**: *Sur la contrôlabilité approche des inequations varationnelles et d'autres problèmes paraboliques non linéaires*. C. R. Acad. Sci. Paris, 312, serie I, pp. 519-522 (1991).

[9] **Díaz,J.I.-DeThelin,F,**: *On a nonlinear parabolic problem arising in some models relative to turbulance flows*. Aparecerá en S.I.A.M. Journal of Math. Analys. (1994).

[10] **Díaz,J.I.-Fursikov,A.V.**: *Approximate controllability of the Stokes system by external local one-dimensional forces*. Manuscrito. Mayo (1993).

[11] **Díaz,J.I.-Fursikov,A.V.**: *A simple proof of the controllability from the interior for non-linear parabolic problems*. Manuscrito. Mayo (1993).

[12] **Díaz,J.I.-Fursikov,A.V.-Ramos,A.M.**: Artículo en preparación.

[13] **Díaz,J.I.-Henry,J.-Ramos,A.M.**: Artículo en preparación.

[14] **Fabre,C.-Puel,J.P.-Zuazua,E.**: *Contròlabilité approchée de l'équation de la chaleur semi-linéaire*. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, p. 807-812 (1992).

[15] **Fabre,C.-Puel,J.P.-Zuazua,E.**: *Approximate controllability of the semilinear heat equation*. Preprint (1993).

[16] **Fursikov,A.V.**: *Control problems and theorems concerning the unique solvability of a mixed boundary value problem for the three-dimensional Navier-Stokes and Euler equations*. Math. USSR Sbornik, 43 (2) pp.251-273 (1982).

[17] **Fursikov,A.V.**: *Lagrange principle for problems of optimal control of ill-posed or singular distribuited systems*. J. Math. Pure et Appl., 71, N 2 pp. 139-195 (1992).

[18] **Fursikov,A.V.-Imanuvilov,O.Yu.**: *On ε-controllability of the Stokes problem with distributed control concentred in subdomain*. Russian Math. Surveys, 47, N 1, pp.217-218, (en Ruso), (1992).

[19] **Fursikov,A.V.-Imanuvilov,O.Yu.**: *On the approximate controllability of the Stokes system*. Annales de la Faculte des Sciences de Toulouse (próximo a aparecer).

[20] **Fursikov,A.V.-Imanuvilov,O.Yu.**: *On the controllability of certain systems simulating a fluid flow*. Preprint. Abril (1993).

[21] **Haraux,A.**: *Nonlinear Evolution Equation*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, (1981).

[22] **Henry,J.**: *Etude de la contrôlabilité de certaines équations paraboliques*. Thèse d'Etat, Université Paris VI, (1978).

[23] **Kamin,S.-Peletier,L.A.-Vazquez,J.L.**: *Classification of singular solutions of a nonlinear heat equation*. Duke Mathematical Journal, Vol. 58, No. 3 pp. 601-615 (June-1989).

[24] **Ladyzhenskaya,O.A.**: *The Mathematical Theory of viscous in compressible flow*. Gordon anf Breach, New-York, (1961), (rev. 1969).

[25] **Ladyzenskaja,O.A.-Solonnikov,V.A.-Ural'ceva,N.N.**: *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. A.M.S. Rhode Island (1968).

[26] **Lions,J.L.**: *Are there connections between turbulence and controllability?*. En el libro Analysis and Optimization des systems. Springer-Verlag (1990).

[27] **Lions,J.L.**: *Control du systeme de Stokes*. Conferencia en el Curso de Verano Environment, Economics and their mathematical models. Almería (1992).

[28] **Lions,J.L.**: *Contrôle optimal de systemes gouvernés par des equations aux derivées partielles*. Dunod (1968).

[29] **Lions,J.L.**: *Remarques sur la contrôlabilité approchée*, Actas de "Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos". Universidad de Malaga (Octubre-1990).

[30] **Lions,J.L.-Magenes,E.**: *Problemes aux limites non homogenes et application*, Vol. 1. Paris. Dunod (1968).

[31] **MacCamy,R.C.-Mizel,V.J.-Seidman,T.I.**: *Aproximate boundary controllability for the heat equation*. Jour. Math. Anal. Appl. 23, p. 699-703 (1968).

[32] **Mizohata,S.**: *Unicité du prolongement de solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques.* Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A31 , (3), p. 219-239 (1985).

[33] **Pazy,A.**: *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer-Verlag, Vol. 44 (1983).

[34] **Protter,M.-Weinberger,H.**: *Maximum principles in differential equations.* Prentice Hall (1967).

[35] **Sachs,E-Schmidt,E.J.P.G.**: *On reachable states in boundary control for the heat equation, and an associated moment problem.* Appl. Math. and Optim. 7, p. 225-232 (1981).

[36] **Saut,J.C.-Scheurer,B.**: *Unique continuation for some evolution equations.* J. Differntial equations, 66, (1), p. 118-139 (1987).

[37] **Schmidt,E.J.P.G.**: *Even more states reachable by boundary control for the heat equation.* SIAM J. Control and Optimization, Vol. 24, (1986).

[38] **Seidman,T.I.**: *A well-posed problem for the heat equation.* Bull. Amer. Math. Soc. 80, p. 901-902 (1974).

[39] **Simon,J.**: *Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$.* Annali di Matematica pura ed applicata. Serie 4, tomo 146, pp.65-96 (1987).

[40] **Temam,R.**: *Navier-Stokes equations. Theory and Numerical Analysis.* A. North Holland, (1979).

[41] **Vishik,M.I.-Fursikov,A.V.**: *Mathematical Problems of Statistical Hydromechanics.* Kluwer Ac. Publ. Dordrecht, Boston, London, (1988).