Un método de viscosidad para la controlabilidad aproximada de ciertas ecuaciones parabólicas cuasilineales.

Jesús Ildefonso DÍAZ*

Ángel Manuel RAMOS†

*Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid, Avda. Complutense s/n, 28040 Madrid.

†Departamento de Informática y Automática, Universidad Complutense de Madrid, Avda. Complutense s/n, 28040 Madrid.

A Antonio Valle, precursor e impulsor del desarrollo de la Teoría de Control en nuestro país.

Resumen

La controlabilidad aproximada de ciertas ecuaciones parabólicas cuasilineales de segundo orden es analizada mediante un método de viscosidad evanescente consistente en añadir un término de orden cuatro destinado a tender más tarde a cero. En aras a una mejor comprensión del método se ilustra también su aplicación al caso de ecuaciones parabólicas semilineales.

1 Introducción

La consideración de alguno de los múltiples problemas matemáticos que tienen su origen en la teoría de Control es bastante reciente si nos limitamos a la producción de especialistas españoles. Si bien ya se pueden encontrar algunas alusiones al tema en el discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias de Madrid de Pedro Puig Adam en 1952 (Puig Adam [18]), el primer trabajo en el que este tipo de cuestiones se aborda con rigor matemático parece ser el de Antonio Valle (Valle [21]) fruto de su tesis doctoral (Valle [22]) que, aunque presentada en la Universidad Complutense de Madrid, fué dirigida por el Profesor J. L. Lions. Desde entonces, la labor impulsora de A. Valle en aras al desarrollo de esta parcela en nuestro país ha sido constante y se ha venido encauzando en diferentes frentes: dirección de tesis doctorales, mecenazgo en el contacto con grupos activos de otros países, organización de congresos sobre el tema, etc... Numerosos criterios objetivos permiten afirmar que su esfuerzo ha sido fructífero y hoy día es grato reconocer la deuda que esta comunidad científica tiene contraída con él. Valgan las lineas que siguen para manifestar nuestro reconocimiento.

En el presente trabajo se aborda la cuestión de la controlabilidad aproximada para ciertos problemas parabólicos cuasilineales que relevantes en las aplicaciones. Dada una función continua creciente φ, numerosos sistemas físicos y biológicos se rigen por el problema parabólico cuasilineal

$$(\mathcal{PC})\begin{cases} y_t - \Delta\varphi(y) = h + v\chi_\omega & \text{en } Q := \Omega \times (0,T), \\ \varphi(y) = 0 & \text{en } \Sigma := \partial\Omega \times (0,T), \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $h \in L^2(0,T : H^{-1}(\Omega))$, $y_0 \in L^2(\Omega)$ son datos conocidos y $v \in L^2(\omega \times (0,T))$ representa una posible acción sobre el sistema desde el subconjunto abierto ω de Ω. Aquí Ω representa un abierto regular acotado de $\mathbb{R}^N$, $T > 0$ y $H^{-1}(\Omega)$ denota el espacio dual de $H_0^1(\Omega)$ (referencias sobre la modelización pueden verse, p.e. en Kalashnikov [13]). Recordemos que, gracias a resultados bien conocidos (véase p.e. Brézis [1]), se tiene la existencia y unicidad de una solución débil de $(\mathcal{PC})$, $y \in \mathcal{C}([0,T] : H^{-1}(\Omega))$. Nuestro interés radica en la elección del control v de manera que $y(\cdot,T)$ se aproxime, en la norma de $H^{-1}(\Omega)$, tanto como queramos a un estado deseado $y_d \in H^{-1}(\Omega)$. Es la *controlabilidad aproximada en* $H^{-1}(\Omega)$ (recordemos que el carácter parabólico de $(\mathcal{PC})$ conlleva diversos efectos regularizantes que impiden, en general, tener la controlabilidad exacta $y(\cdot,T) = y_d(\cdot)$).

Según la sistematización llevada a cabo en Lions [14], es bien conocido que la controlabilidad aproximada puede ser obtenida, en el caso de problemas lineales, mediante una especie de alternativa de Fredholm que reduce el problema a mostrar la llamada *propiedad de continuación única* para las soluciones del *problema lineal dual*. El estudio de problemas parabólicos no lineales parece tener sus primeros resultados generales en la tesis de J. Henry (Henry [12]). Los problemas son linealizados previamente y se abordan posteriormente mediante técnicas de punto fijo. El anterior programa fué llevado con éxito sobre $L^2(\Omega)$ para problemas semilineales de la forma

$$(\mathcal{PS})\begin{cases} y_t - \Delta y + \varphi(y) = h + v\chi_\omega & \text{en } Q, \\ y = 0 & \text{en } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

en Fabre, Puel y Zuazua [10] [11] (véase también Díaz y Ramos [6] [7]) utilizando de manera vital una información precisa sobre la construcción de los controles para el caso lineal que tiene sus orígenes en el importante trabajo Lions [16]. Es de señalar que solo si ω es un subdominio estricto el problema ofrece una dificultad importante (véase Díaz y Fursikov [5] para el caso $\omega = \Omega$).

En el caso del problema cuasilineal $(\mathcal{PC})$ el problema linealizado no posee la compacidad suficiente para la posterior aplicación del argumento de punto fijo y se requiere una herramienta adicional. Aquí seguiremos un método que consiste en aproximar el problema mediante la adición de un término nuevo en la ecuación que luego haremos tender hacia cero. Este tipo de métodos suelen conocerse en la literatura como *métodos de viscosidad evanescente*, por aparecer en el contexto de fluidos ideales cuando se interpretan como límites de fluidos con una viscosidad cada vez más pequeña. En nuestro caso será conveniente la presencia de términos de orden superior, lo que nos lleva a considerar la cuestión de la controlabilidad aproximada asociada al problema

$$(\mathcal{PC})_\varepsilon \begin{cases} y_t + \varepsilon\Delta^2 y - \Delta\varphi(y) = h + v\chi_\omega & \text{en } Q, \\ y = \Delta y = 0 & \text{en } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Nuestro resultado principal (Teorema 1) parece ser el primer resultado en la literatura para este tipo de problemas pero no alcanza a mostrar la controlabilidad aproximada para $(\mathcal{PC})$ en $H^{-1}(\Omega)$ sino en espacios más débiles $H^{-1-\gamma}(\Omega)$, con $\gamma > 0$ arbitrario. La razón de no alcanzar $H^{-1}(\Omega)$ es bastante técnica, radica en el tipo de linealización seguida y es independiente del proceso de control. Bastaría probar un resultado de convergencia ante baja regularidad (véase el Corolario 15) para concluir el resultado en este espacio. Con el fin de exponer más pedagógicamente este punto técnico, presentamos aquí también la aplicación del método de viscosidad al caso del problema semilineal $(\mathcal{PS})$ que aproximamos mediante

$$(\mathcal{PS})_\varepsilon \begin{cases} y_t + \varepsilon\Delta^2 y - \Delta y + \varphi(y) = h + v\chi_\omega & \text{en } Q, \\ y = \Delta y = 0 & \text{en } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Insistimos en que no pretendemos mejorar los resultados en la literatura sobre la controlabilidad de $(\mathcal{PS})$ sino mostrar como una linealización más favorable permite alcanzar resultados de controlabilidad en mejores espacios, tales como $L^2(\Omega)$.

Es importante señalar que las funciones φ en $(\mathcal{PC})$, $(\mathcal{PC})_\varepsilon$, $(\mathcal{PS})$ y $(\mathcal{PS})_\varepsilon$ se supondrán *sublineales en el infinito*, e.d. tales que

$$|\varphi(s)| \leq C(1 + |s|) \qquad \text{si } |s| > M, \text{ para algún } M > 0. \tag{1}$$

La razón es que en otro caso se pueden obtener resultados de *Obstrucción* que muestran la imposibilidad de que se tenga la controlabilidad aproximada (esto ha sido explícitamente obtenido en el caso de $(\mathcal{PS})$ y $(\mathcal{PS})_\varepsilon$ en Díaz y Ramos [7] y [8] respectivamente). Curiosamente, en el caso del problema $(\mathcal{PC})$ aparece también una obstrucción cuando φ es estrictamente sublineal en el infinito (por ejemplo si $\varphi(s) = |s|^{m-1}s$ y $0 < m < 1$) tal y como se ha mostrado en Díaz y Ramos [9]. Nuestro resultado principal se ocupará pues de una clase bastante concreta de funciones φ que son "esencialmente lineales en el infinito" pero que incluye un problema de interés en las aplicaciones como es el llamado *problema de Stefan a dos fases* y que corresponde al caso de $\varphi(s) = ks$ si $s \leq 0$, $\varphi(s) = 0$ si $s \in [0, L]$ y $\varphi(s) = k(s - L)$ si $s > L$.

2 Controlabilidad vía viscosidad evanescente.

El principal resultado de este trabajo es el siguiente:

Teorema 1 *Sea φ una función continua no decreciente tal que $\varphi(0) = 0$. Supongamos que existe $k > 0$ tal que*

$$\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}\backslash[-M_1, M_1]),\ |\varphi'(s) - k| \leq \frac{C_1}{|s|} \quad si \quad |s| > M_1 \tag{2}$$

y

$$|\varphi(s) - ks| \leq C_2 \qquad \forall\ s \in \mathbb{R} \tag{3}$$

para ciertas constantes positivas C_1, M_1 y C_2. Entonces, si $\varphi'(s) \geq c > 0$ c.p.t. $s \in \mathbb{R}$ o $h \in L^2(Q)$, el problema $(\mathcal{PC})$ verifica la propiedad de la controlabilidad aproximada en $H^{-(1+\gamma)}(\Omega)$ para cualquier $\gamma > 0$, i.e., dados $y_d \in H^{-(1+\gamma)}(\Omega)$ y $\delta > 0$ existe $v \in L^2(0, T : L^2(\omega))$ tal que $\| y(T; v) - y_d \|_{H^{-(1+\gamma)}(\Omega)} < \delta$.

Como mencionamos en la Introducción, la demostración del Teorema 1 se obtendrá mediante el estudio de la controlabilidad aproximada para el problema de orden superior con viscosidad $(\mathcal{PC})_\varepsilon$.

Teorema 2 *Supongamos $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (no necesariamente no decreciente) verificando (1) y derivable en algún punto $s_0 \in \mathbb{R}$. Sea $y_d \in H^{-(1+\gamma)}(\Omega)$ y $\delta > 0$. Entonces, para todo $\varepsilon > 0$ existe un control $v_\varepsilon \in L^2((0, T) \times \omega))$ tal que si $y(t; v)$ es la correspondiente solución de $(\mathcal{PC})_\varepsilon$ entonces*

$$\| y(T; v_\varepsilon) - y_d \|_{H^{-(1+\gamma)}(\Omega)} < \delta. \tag{4}$$

Si además φ verifica (2) y (3), existe una constante positiva K, (dependiente de k, C_1, C_2 y M_1 pero independiente de ε), tal que los anteriores controles v_ε pueden ser tomados tales que

$$\| v_\varepsilon \|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq K, \qquad \textit{para todo } \varepsilon > 0. \tag{5}$$

Con respecto a la aplicación del método de viscosidad para el problema semilineal $(\mathcal{PS})$, se tienen las versiones análogas de los resultados anteriores aunque ahora en espacios mejores tales como, por ejemplo, $L^2(\Omega)$. Recordemos que la existencia de una única $y \in \mathcal{C}([0, T] : L^2(\Omega))$ se tiene por resultados standard (véase p.e. Lions [15]).

Teorema 3 *Sea φ una función continua no decreciente, con $\varphi(0) = 0$, satisfaciendo únicamente (1) y derivable en algún punto $s_0 \in \mathbb{R}$. Entonces el problema $(\mathcal{PS})$ verifica la propiedad de la controlabilidad aproximada en $L^2(\Omega)$.*

Teorema 4 *Sean φ como en el Teorema 2. Entonces el problema $(\mathcal{PS})_\varepsilon$ verifica la propiedad de controlabilidad aproximada en $L^2(\Omega)$. Además, sin hipótesis adicionales sobre φ se tiene la estimación uniforme (5).*

La demostraciones de las primeras partes de los Teoremas 2 y 4 son muy similares a las del resultado principal de Díaz y Ramos [8]. Las segundas partes de esos teoremas siguen algunos de los pasos de la demostración del Teorema 1 de Díaz y Ramos [8] que aquí únicamente esbozaremos, poniendo énfasis en los nuevos argumentos necesarios para llegar a las conclusiones. En ambos casos, el primer paso consiste en probar la controlabilidad aproximada para unos problemas linealizados. Puesto que la hipótesis (2) implica claramente que $\varphi'(s) \to k$ cuando $|s| \to \infty$, es natural definir la función

$$\varphi_0(s) := \varphi(s) - ks, \qquad s \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

De este modo, basta linealizar la función φ_0, lo cual (por conveniencia) lo hacemos cerca de ciertos puntos $s_\varepsilon \in \mathbb{R}$ (que dependerán de ε), elegidos de manera adecuada, según muestra el siguiente resultado:

Lema 5 *Sea $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (no necesariamente no decreciente) satisfaciendo (2). Dado $\varepsilon > 0$, existe $s_\varepsilon \in \mathbb{R}$ tal que la función*

$$g_\varepsilon(s) := \frac{\varphi_0(s) - \varphi_0(s_\varepsilon)}{s - s_\varepsilon} \tag{7}$$

satisface $g_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ y

$$\| g_\varepsilon \|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \sqrt{\varepsilon}. \tag{8}$$

Si además φ verifica (3), entonces existe una constante positiva K_2 (que depende de C_1, C_2 y M_1 pero no de ε), tal que

$$|g_\varepsilon(s) s_\varepsilon| \leq K_2, \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0 \text{ y todo } s \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Demostración. Por (2), podemos elegir $s_\varepsilon \in \mathbb{R}$ suficientemente grande tal que $|s_\varepsilon| > 2M_1$ y

$$|\varphi_0'(s)| < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad |s| \geq \frac{|s_\varepsilon|}{2}. \tag{10}$$

De hecho, si se tiene (3), e.d. si $\varphi_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, entonces podemos elegir s_ε satisfaciendo (10) tal que

$$\frac{\| \varphi_0 \|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{|s_\varepsilon|} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{8}.$$

En el caso de que φ_0 no sea una función acotada, pero siempre bajo (2), podemos elegir s_ε satisfaciendo (10) tal que

$$|\varphi_0(s)| \leq |\varphi_0(s_\varepsilon)| \quad \forall\, s \in \mathbb{R} \text{ tal que } |s| \leq \frac{|s_\varepsilon|}{2} \tag{11}$$

y

$$\frac{|\varphi_0(s_\varepsilon)|}{|s_\varepsilon|} < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{8}. \tag{12}$$

En efecto: la hipótesis (2) implica claramente (12). Comprobemos (11). Si definimos $s_N \in [-N, N]$ tal que $|\varphi_0(s_N)| = \max\{|\varphi_0(s)| : \ s \in [-N, N]\}$, entonces, como $\varphi_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ es una función no acotada, es claro que $\{s_N\} \to +\infty$ cuando $N \to +\infty$. Entonces, tomando $s_\varepsilon = s_N$, con N suficientemente grande, las propiedades (10) y (11) se verifican simultáneamente.

Supongamos ahora que $s_\varepsilon > 0$ (el otro caso se hace de un modo similar). Entonces es sencillo comprobar la propiedad (8) si tenemos en cuenta las propiedades anteriores, analizando los casos en los que con s está en los distintos intervalos $[\frac{s_\varepsilon}{2}, \infty)$, $(-\frac{s_\varepsilon}{2}, \frac{s_\varepsilon}{2})$ y $(-\infty, -\frac{s_\varepsilon}{2}]$.

Comprobemos, por último, que se verifica (9) bajo la condición adicional (3). Supongamos $s \in [\frac{s_\varepsilon}{2}, \infty)$: Entonces, por el Teorema del Valor Medio y (2), existe $\theta(s) \in [\frac{s_\varepsilon}{2}, \infty)$ tal que

$$|g_\varepsilon(s)s_\varepsilon| = |\varphi_0'(\theta(s))\theta(s)||\frac{s_\varepsilon}{\theta(s)}| \leq 2|\varphi_0'(\theta(s))\theta(s)| \leq 2C_1$$

Cuando $s \in (-\frac{s_\varepsilon}{2}, \frac{s_\varepsilon}{2})$ se tiene que $|s - s_\varepsilon| \geq \frac{|s_\varepsilon|}{2}$ y por tanto

$$|g_\varepsilon(s)s_\varepsilon| \leq \frac{|\varphi_0(s)|}{|s - s_\varepsilon|}|s_\varepsilon| + \frac{|\varphi_0(s_\varepsilon)|}{|s - s_\varepsilon|}|s_\varepsilon| \leq 2|\varphi_0(s)| + 2|\varphi_0(s_\varepsilon)| \leq 4C_2.$$

Finalmente, si $s \in (-\infty, -\frac{s_\varepsilon}{2}]$, existe $\theta(s) \in (-\infty, -\frac{s_\varepsilon}{2}]$ tal que

$$\begin{aligned}
|g_\varepsilon(s)s_\varepsilon| &\leq \frac{|\varphi_0(s) - \varphi_0(-s_\varepsilon)|}{|s - (-s_\varepsilon)|}|s_\varepsilon| + \frac{|\varphi_0(-s_\varepsilon)|}{|s - s_\varepsilon|}|s_\varepsilon| + \frac{|\varphi_0(s_\varepsilon)|}{|s - s_\varepsilon|}|s_\varepsilon| \\
&\leq |\varphi_0'(\theta(s))\theta(s)|\frac{|s_\varepsilon|}{|\theta(s)|} + |\varphi_0(-s_\varepsilon)| + |\varphi_0(s_\varepsilon)| \quad (\text{pues } |s - s_\varepsilon| \geq |s_\varepsilon|) \\
&\leq 2C_1 + 2C_2.
\end{aligned}$$

■

Observación 6 Es fácil ver que las siguientes condiciones (más fáciles de verificar que (2) y (3)) son suficientes para obtener (9):

Primer caso: φ_0 es una función acotada con $\varphi_0(0) = 0$, existe $\overline{s} > 0$ tal que $\varphi_0''(s) \leq 0 \ \forall \ s \geq \overline{s}$, $\varphi_0''(s) \geq 0 \ \forall \ s \leq -\overline{s}$ y φ_0 es una función no decreciente en $(-\infty, -\overline{s}] \cup [\overline{s}, +\infty)$.

Segundo caso: φ_0 es una función acotada con $\varphi_0(0) = 0$ y existe $\overline{s} > 0$ tal que $\varphi_0''(s) \leq 0 \ \forall \ s \geq \overline{s}$, $\varphi_0''(s) \geq 0 \ \forall \ s \leq -\overline{s}$.

■

Volvamos a nuestro proceso de linealización. Puesto que $\varphi_0(s) = \varphi_0(s_\varepsilon) + g_\varepsilon(s)s - g_\varepsilon(s)s_\varepsilon$, comencemos considerando la controlabilidad aproximada para los problemas lineales que se obtienen al reemplazar el término $\varphi(y)$ por

$$ky + g_\varepsilon(z)y + \varphi_0(s_\varepsilon) - g_\varepsilon(z)s_\varepsilon,$$

en el caso del problema $(\mathcal{PC})_\varepsilon$ y

$$G(z)y+\varphi(s_0),$$

en el caso del problema $(\mathcal{PS})_\varepsilon$, donde z es una función arbitraria de $L^2(Q)$ y G es la función real definida por $G(s) := \dfrac{\varphi(s)-\varphi(s_0)}{s-s_0}$. De este modo, si $z=y$, las expresiones anteriores coincidirán con $\varphi(y)$. Si denotamos

$$h_\varepsilon(z) := \Delta\left(\varphi_0\ (s_\varepsilon) - g_\varepsilon(z)s_\varepsilon\right) = -\Delta\left(g_\varepsilon\ (z)s_\varepsilon\right)\ \text{ y }\ H(z) := \varphi(s_0) - G(z)s_0,$$

entonces se tiene que $h_\varepsilon(z) \in L^\infty(0,T : H^{-2}(\Omega))$ y $H(z)\in L^\infty(Q)$ para todo $z\in L^2(Q)$ y para todo $\varepsilon>0$. Consideremos pues la propiedad de controlabilidad aproximada correspondiente a los problemas lineales

$$(\mathcal{P}_C\mathcal{L})_\varepsilon \begin{cases} y_t+\varepsilon\Delta^2 y - k\Delta y - \Delta\left(g_\varepsilon(z)y\right) = h + h_\varepsilon(z) + u_\varepsilon\chi_\omega & \text{en } Q,\\ y=\Delta y = 0 & \text{en } \Sigma,\\ y(0)=y_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y

$$(\mathcal{P}_S\mathcal{L})_\varepsilon \begin{cases} y_t+\varepsilon\Delta^2 y - \Delta y + G(z)y = h + H(z) + u_\varepsilon\chi_\omega & \text{en } Q,\\ y=\Delta y = 0 & \text{en } \Sigma,\\ y(0)=y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases}$$

Sea $E := H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$. A continuación damos un resultado de existencia y unicidad de soluciones, en el espacio $W := \{y\in L^2(0,T:E);\ y_t\in L^2(0,T:E')\}$, para un problema que engloba a $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})_\varepsilon$ y $(\mathcal{P}_S\mathcal{L})_\varepsilon$

Proposition 7 *Supongamos* $y_0\in L^2(\Omega)$, $h\in L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$ *y* $\|\ a(x,t)\ \|_{L^\infty(Q)}$, $\|\ b(x,t)\ \|_{L^\infty(Q)}\leq M$. *Entonces existe una única función* $y\in W$ *solución de*

$$\begin{cases} y_t+\Delta^2 y - \Delta(a(x,t)y) + b(x,t)y = h & \text{en } Q,\\ y=\Delta y=0 & \text{en } \Sigma,\\ y(0)=y_0 & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{13}$$

Además se tiene la estimación

$$\|y\|_W \leq C\left(\|h\|_{L^2(0,T;E')} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}\right), \tag{14}$$

donde la constante C *depende solo de* M *(supuesto* Ω *y* T *fijos).*

Demostración. Para todo $n\in\mathbb{N}$ definimos y^{n+1} como la solución del problema iterativo

$$\begin{cases} y_t^{n+1}+\Delta^2 y^{n+1} = h + \Delta(a(x,t)y^n) - b(x,t)y^n & \text{en } Q,\\ y^{n+1}=\Delta y^{n+1}=0 & \text{en } \Sigma,\\ y^{n+1}(0)=y_0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

donde $y^0(t) := 0$ para todo $t \in [0,T]$. La existencia y unicidad de una solución $y^n \in W$ se puede encontrar, por ejemplo, en el Teorema 3.4.1 de Lions y Magenes [17]. De este modo, para todo $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, $y^{n+1} - y^n$ es solución de

$$\begin{cases} (y^{n+1}-y^n)_t + \Delta^2(y^{n+1}-y^n) = \Delta[a(y^n - y^{n-1})] - b(y^n - y^{n-1}) & \text{en } Q, \\ (y^{n+1}-y^n) = \Delta(y^{n+1}-y^n) = 0 & \text{en } \Sigma, \\ (y^{n+1}-y^n)(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{15}$$

y por tanto (véase de nuevo el Teorema 3.4.1 de Lions y Magenes [17]) $y^{n+1} - y^n \in W$ y

$$\| y^{n+1} - y^n \|_W \leq c_1 \| (a+b)\ (y^n - y^{n-1}) \|_{L^2(Q)} . \tag{16}$$

Entonces, como $W \subset \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$ con inclusión continua (véase, e.g. [17]), tenemos que

$$\| y^{n+1} - y^n \|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} \leq c_2 \| (a+b)\ (y^n - y^{n-1}) \|_{L^2(Q)} .$$

Además podemos elegir $C_2 = C_2(T)$ tal que

$$\| y^{n+1} - y^n \|_{\mathcal{C}([0,t];L^2(\Omega))} \leq C_2 \| (a+b)\ (y^n - y^{n-1}) \|_{L^2((0,t)\times\Omega)}, \ \forall\, t \in [0,T].$$

De este modo

$$\| (y^{n+1} - y^n)(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq (C_2 M)^2 \int_0^t \| (y^n - y^{n-1})(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau, \ \forall t \in [0,T]$$

Entonces, para todo $t \in [0,T]$ deducimos que

$$\begin{aligned} \| (y^{n+1}-y^n)(t) \|^2_{L^2(\Omega)} &\leq (C_2^2 M^2)^{n-1} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} \| (y^2-y^1)(\tau_n) \|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau_n \cdots d\tau_1 \\ &\leq (C_2^2 M^2)^{n-1} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} \| y^2 - y^1 \|^2_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))}\, d\tau_n \cdots d\tau_1 \\ &\leq (C_2^2 M^2)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \| y^2 - y^1 \|^2_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} \\ &\leq \frac{(C_2^2 M^2 T)^{n-1}}{(n-1)!} \| y^2 - y^1 \|^2_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))}, \end{aligned}$$

lo que implica que $\| y^{n+1} - y^n \|_{\mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))} \to 0$ cuando $n \to \infty$ y por tanto, por (16), deducimos que $\| y^{n+1} - y^n \|_W \to 0$ cuando $n \to \infty$. Entonces, existe $y \in W$ tal que $y_n \to y$ en W cuando $n \to \infty$. Para ver que y es solución de (13) observemos que $\Delta^2 y^n \to \Delta^2 y$ en $L^2(0,T:E')$, $\Delta y^n \to \Delta y$ en $L^2(Q)$, $\Delta(ay^n) + by^n \to \Delta(ay) + by$ en $L^2(0,T:E')$ e $y_t^n \to y_t$ en $L^2(0,T:E')$) cuando $n \to \infty$. Pasando al límite en $n \in \mathbb{N}$ se tiene que y es solución de (13). Para probar (14), multiplicamos en (13) por y. Entonces es fácil ver que

$$\|y\|_W \leq C\left(\|h\|_{L^2(0,T:E')} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)} + \|y\|_{L^2(Q)}\right). \tag{17}$$

Además,

$$\| y(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \Big(\| y(0) \|^2_{L^2(\Omega)} + c_2 \| h \|^2_{L^2(0,T:E')}\Big) + c_3 \int_0^t \| y(s) \|^2_{L^2(\Omega)} \, ds.$$

Entonces, aplicando la desigualdad de Gronwall, deducimos que

$$\| y(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \Big(\| y(0) \|^2_{L^2(\Omega)} + c_2 \| h \|^2_{L^2(0,T:E')}\Big) e^{c_3 t} \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

De aquí se concluye que

$$\| y \|_{L^2(Q)} \leq c_4 \left(\|h\|_{L^2(0,T:E')} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

lo cual implica, junto con (17), la desigualdad (14). Finalmente, gracias a (14) y a la linealidad del problema (13), se deduce la unicidad de solución.

■

Para establecer un resultado de controlabilidad aproximada, asociado a los problemas $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})_\varepsilon$ y $(\mathcal{P}_S\mathcal{L})_\varepsilon$, siguiendo a Lions [16], comenzamos abordando el problema de control óptimo

$$\inf_{v \in L^2(\omega\times(0,T))} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\omega\times(0,T)} v^2 dxdt, \quad y_{\varepsilon,z}(T,v) \in y_d + \delta B_{X'} \right\},$$

donde $B_{X'}$ representa la bola unidad del espacio X' que será $H^{-(1+\gamma)}(\Omega)$ y $L^2(Q)$ respectivamente. Entonces, al igual que en [16], por la teoría de dualidad del análisis convexo, es fácil probar que el problema de control óptimo anterior es equivalente a este otro:

$$\inf_{p^0 \in X} J_\varepsilon(p^0),$$

donde $X = H_0^{1+\gamma}(\Omega)$ o $X = L^2(\Omega)$ respectivamente y $J_\varepsilon = J_\varepsilon(\cdot; z, y_d) : X \to \mathbb{R}$ está definido por

$$J_\varepsilon(p^0; z, y_d) = J_\varepsilon(p^0) = \frac{1}{2} \| p \|^2_{L^2(\omega\times(0,T))} + \delta \| p^0 \|_X - < y_d, p^0 >_{X'\times X} . \tag{18}$$

Aquí p representa la solución del problema parabólico retrógrado correspondiente, e.d.

$$(\mathcal{P}_C\mathcal{L})^*_\varepsilon \begin{cases} -p_t + \varepsilon\Delta^2 p - k\Delta p - g_\varepsilon(z)\Delta p = 0 & \text{en } Q, \\ p = \Delta p = 0 & \text{en } \Sigma, \\ p(T) = p^0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y

$$(\mathcal{P}_S\mathcal{L})^*_\varepsilon \begin{cases} -p_t + \varepsilon\Delta^2 p - \Delta p + G(z)p = 0 & \text{en } Q, \\ p = \Delta p = 0 & \text{en } \Sigma, \\ p(T) = p^0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

para cualquier $p^0 \in X$ dado. La existencia y unicidad de una solución $p \in W$ en ambos casos es similar a la demostración de la Proposición 7. Más aún, mediante algunas sencillas modificaciones de los argumentos dados en Fabre, Puel y Zuazua [10], [11] para un funcional similar a este y la propiedad de *Continuación Única* (véase Saut y Scheurer [19]) es fácil probar que el funcional $J_\varepsilon(\cdot; z, y_d)$ es continuo, estrictamente convexo sobre X y satisface

$$\liminf_{\|p^0\|_X \to \infty} \frac{J_\varepsilon(p^0; z, y_d)}{\| p^0 \|_X} \geq \delta. \tag{19}$$

Por tanto $J_\varepsilon(\cdot; z, y_d)$ alcanza su mínimo en un único punto $\widehat{p}^0_\varepsilon$ de X. Además, $\widehat{p}^0_\varepsilon = 0$ si y solo si $\| y_d \|_{X'} \leq \delta$.

A continuación damos un resultado de controlabilidad aproximada para dos casos especiales:

Lema 8 *Sea $z \in L^2(Q)$ y $y_d \in X'$. Entonces, para todo $\delta > 0$ existe $v_\varepsilon \in L^2(\omega \times (0,T))$ tal que la solución y_ε del problema*

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon \Delta^2 y - k\Delta y - \Delta\left(g_\varepsilon(z) y\right) = v_\varepsilon \chi_\omega & \text{en } Q, \\ y = \Delta y = 0 & \text{en } \Sigma, \\ y(0) = 0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{20}$$

(respect.

$$y_t + \varepsilon \Delta^2 y - \Delta y + G(z) y = v_\varepsilon \chi_\omega \ \text{ en } Q \tag{21}$$

satisface

$$\| y_d - y_\varepsilon(T) \|_{X'} \leq \delta$$

con $X' = H^{-(1+\gamma)}(\Omega)$ (resp. $X' = L^2(\Omega)$).

Demostración. Se podría probar la controlabilidad aproximada de los dos problemas en $L^2(\Omega)$ para todo $\varepsilon > 0$ pero, para poder pasar al límite $\varepsilon \to 0$, en el primer caso, en el caso de (20) nos limitaremos a $H^{-(1+\gamma)}(\Omega)$.

Si $q^0 \in X$ y q, $\widehat{p}$ son las soluciones de $(\mathcal{P}_C \mathcal{L})^*_\varepsilon$ (resp. $(\mathcal{P}_S \mathcal{L})^*_\varepsilon$) con datos $q(T) = q^0$ y $\widehat{p}_\varepsilon(T) = \widehat{p}^0_\varepsilon$ respectivamente, entonces, por la caracterización del mínimo, tenemos que

$$-\int_{\omega \times (0,T)} \widehat{p}_\varepsilon q dx dt + < y_d, q^0 >_{X' \times X} \leq$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\delta \| \widehat{p}^0_\varepsilon + h q^0 \|_X - \delta \| \widehat{p}^0_\varepsilon \|_X}{h} \leq \delta \| q^0 \|_X \qquad \forall q^0 \in X.$$

Ahora, si tomamos $v_\varepsilon \equiv \widehat{p}$ y multiplicamos en la ecuación de (20) (resp. (21)) por q obtenemos

$$< y_d, q^0 >_{X' \times X} = \int_{\omega \times (0,T)} \widehat{p}_\varepsilon q dx dt$$

y de este modo

$$< y_d - y_\varepsilon(T; v_\varepsilon), q^0 >_{X' \times X} \leq \delta \parallel q^0 \parallel_X \quad \forall\, q^0 \in H_0^{1+\gamma}(\Omega),$$

lo que muestra que

$$\parallel y_d - y_\varepsilon(T; v_\varepsilon) \parallel_{X'} \leq \delta$$

y concluye la prueba del Lema 8.

■

En relación a la controlabilidad aproximada para los problemas linealizados $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})_\varepsilon$ y $(\mathcal{P}_S\mathcal{L})_\varepsilon$ tenemos el siguiente resultado

Teorema 9 *Sean $z \in L^2(Q)$ e $y_d \in X'$. Supongamos $g_\varepsilon, G \in L^\infty(\mathbb{R})$. Sean $\parallel y_d - y(T; z, 0) \parallel_{X'} > \delta$ y $\widehat{p}_\varepsilon$ la solución de $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})_\varepsilon^*$ (resp. $(\mathcal{P}_S\mathcal{L})_\varepsilon^*$) tal que $\widehat{p}(T) = \widehat{p}_\varepsilon^0$, con $\widehat{p}_\varepsilon^0$ mínimo de $J_\varepsilon(\cdot; z, y_d - y(T; z, 0))$, donde, en general, $y(t; z, u)$ representa la solución de $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})_\varepsilon$ (resp. $(\mathcal{P}_S\mathcal{L})_\varepsilon^*$) correspondiente al control u. Entonces la solución y_ε de*

$$\begin{cases} y_t + \varepsilon\Delta^2 y - k\Delta y - \Delta\left(g_\varepsilon(z)y\right) = h + h_\varepsilon(z) + \widehat{p}_\varepsilon\chi_\omega & \textit{en } Q, \\ y = \Delta y = 0 & \textit{en } \Sigma, \\ y(0) = y_0 & \textit{en } \Omega \end{cases}$$

(resp.

$$y_t + \varepsilon\Delta^2 y - \Delta y + G(z)y = h + H(z) + \widehat{p}_\varepsilon\chi_\omega \quad \textit{en } Q \qquad),$$

satisface

$$\parallel y_\varepsilon(T) - y_d \parallel_{X'} \leq \delta. \tag{22}$$

Además, si $\parallel y_d - y(T; z, 0) \parallel_{X'} \leq \delta$, entonces se cumple (22) con el control $v_\varepsilon \equiv 0$. Finalmente, si φ satisface (2) y (3) (resp. ninguna condición suplementaria), existe una constante positiva K, que depende de k, C_1, C_2 y M_1 pero es independiente de ε, tal que los anteriores controles $\widehat{p}_\varepsilon$ satisfacen

$$\parallel \widehat{p}_\varepsilon \parallel_{\mathcal{C}([0,T]:L^2(\omega))} \leq K, \qquad \textit{para todo } \varepsilon > 0 \textit{ y } z \in L^2(Q). \tag{23}$$

Observación 10 El Teorema 9 resuelve los problemas de controlabilidad aproximada asociados a $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})_\varepsilon$ y $(\mathcal{P}_S\mathcal{L})_\varepsilon$ con los controles $u_\varepsilon := \widehat{p}_\varepsilon$. De este modo

$$\parallel u_\varepsilon \parallel_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq K. \tag{24}$$

■

Demostración del Teorema 9. Escribimos y_ε como $y_\varepsilon = L_\varepsilon + Y_\varepsilon$, donde $L_\varepsilon = L_\varepsilon(z) \in \mathcal{C}([0,T] : L^2(\Omega))$ satisface

$$\begin{cases} L_t + \varepsilon\Delta^2 L - k\Delta L - \Delta\left(g_\varepsilon(z)L\right) = h + h_\varepsilon(z) & \text{en } Q, \\ L = \Delta L = 0 & \text{en } \Sigma, \\ L(0) = y_0 & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{25}$$

(resp.

$$L_t + \varepsilon\Delta^2 L - \Delta L + G(z)L = h + H(z) \text{ en } Q \tag{26}$$

e $Y_\varepsilon = Y_\varepsilon(z)$ se toma como la solución de

$$\begin{cases} Y_t + \varepsilon\Delta^2 Y - k\Delta Y - \Delta\left(g_\varepsilon(z)Y\right) = u_\varepsilon(z)\chi_{\mathcal{O}} & \text{en } Q, \\ Y = \Delta Y = 0 & \text{en } \Sigma, \\ Y(0) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

(resp.

$$Y_t + \varepsilon\Delta^2 Y - \Delta Y + G(z)Y = u_\varepsilon(z)\chi_{\mathcal{O}} \text{ en } Q \qquad)$$

asociado al problema de controlabilidad aproximada con estado deseado $y_d - L_\varepsilon(T)$, i.e. tal que $\| Y_\varepsilon(T) - (y_d - L_\varepsilon(T)) \|_{X'} \leq \delta$. El control u_ε lo encontramos del mismo modo que en el Lema 8. De este modo, si $\widehat{p}_\varepsilon$ es la solución de $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})^*_\varepsilon$ (resp. $(\mathcal{P}_S\mathcal{L})^*_\varepsilon$) con dato final $\mathcal{M}(\varepsilon, z, y_d - L_\varepsilon(T))$, donde

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{M} & : & (0,R] \times L^2(Q) \times X' & \longrightarrow & X \\ & & (\varepsilon, z, y_d) & \rightarrow & \widehat{p}^0_\varepsilon, \end{array}$$

el control $u_\varepsilon(z) := \widehat{p}_\varepsilon$ conduce a $\| Y(T) - \widehat{y}_d \|_{X'} \leq \delta$, donde $\widehat{y}_d := y_d - L_\varepsilon(T)$ (en el caso $\| \widehat{y}_d \|_{X'} \leq \delta$ basta tomar $u_\varepsilon \equiv 0$). Para la demostración de (23) utilizamos los cuatro lemas siguientes:

Lema 11 *Si K es un subconjunto compacto de X' entonces $\mathcal{M}((0,R] \times L^2(Q) \times K)$ es un subconjunto acotado de X.*

Demostración. Si la conclusión no fuese cierta, entonces existirían tres sucesiones $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(Q)$, $\{y^n_d\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ y $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,R]$ tales que

$$\| p^0(\varepsilon_n, z_n, y^n_d) \|_X = \| \mathcal{M}(\varepsilon_n, z_n, y^n_d) \|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty. \tag{27}$$

Podemos suponer (renumerando las sucesiones) que

$$g_{\varepsilon_n}(z_n) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} a \quad \text{en la topología débil-}* \text{ de } L^\infty(Q),$$

$$G(z_n) \overset{n\to\infty}{\rightharpoonup} A \quad \text{en la topología débil-}* \text{ de } L^\infty(Q),$$

$$y^n_d \to y_d \quad \text{en la topología fuerte de } X'$$

y

$$\varepsilon_n \to \widetilde{\varepsilon} \quad \text{en } \mathbb{R}.$$

Debido a (8), si $\widetilde{\varepsilon} = 0$ entonces $a \equiv 0$.

Para obtener una contradicción vamos a probar que para cualquier sucesión $\{p^0_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\| p^0_n \|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ se cumple que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{J_\varepsilon(p^0_n; z_n, y^n_d)}{\| p^0_n \|_X} \geq \delta. \tag{28}$$

Si (28) no es cierto, entonces existirá una sucesión $\{p^0_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\| p^0_n \|_X \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ y

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{J_\varepsilon(p^0_n; z_n, y^n_d)}{\| p^0_n \|_X} < \delta. \tag{29}$$

Sean $\widetilde{p}_n^0 = \dfrac{p_n^0}{\| p_n^0 \|_X}$ y $\widetilde{p}_n$ la solución de $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})_\varepsilon^*$ (resp. $(\mathcal{P}_S\mathcal{L})_\varepsilon^*$) asociada a z_n, ε_n y con $\widetilde{p}_n(T) = \widetilde{p}_n^0$. Podemos suponer (de nuevo renumerando la sucesión) que existe $\widetilde{p}^0 \in X$ tal que

$$\widetilde{p}_n^0 \rightharpoonup \widetilde{p}^0 \quad \text{en la topología débil de } X.$$

De aquí deducimos que, o bien $\widetilde{p}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{p}$ en la topología débil de $L^2(0,T : E)$, con $\widetilde{p}$ solución de

$$\begin{cases} -\widetilde{p}_t + \widetilde{\varepsilon}\Delta^2\widetilde{p} - k\Delta\widetilde{p} - a\Delta\widetilde{p} = 0 & \text{en } Q, \\ \widetilde{p} = \Delta\widetilde{p} = 0 & \text{en } \Sigma, \\ \widetilde{p}(T) = \widetilde{p}^0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

(resp.

$$-\widetilde{p}_t + \widetilde{\varepsilon}\Delta^2\widetilde{p} - \Delta\widetilde{p} + A\widetilde{p} = 0 \quad \text{en } Q \qquad),$$

si $\widetilde{\varepsilon} > 0$, o bien $\widetilde{p}_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{p}$ en la topología débil de $L^2(0,T : H_0^1(\Omega))$, con $\widetilde{p}$ solución de

$$\begin{cases} -\widetilde{p}_t - k\Delta\widetilde{p} = 0 & \text{en } Q, \\ \widetilde{p} = 0 & \text{en } \Sigma, \\ \widetilde{p}(T) = \widetilde{p}^0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

(resp.

$$-\widetilde{p}_t - \Delta\widetilde{p} + A\widetilde{p} = 0 \quad \text{en } Q \qquad)$$

si $\widetilde{\varepsilon} = 0$. De este modo, se tiene que

$$\| \widetilde{p}_n \|_{L^2(\omega\times(0,T))}^2 \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty,$$

pues en caso contrario

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{J_{\varepsilon_n}(p_n^0; z_n, y_d^n)}{\| p_n^0 \|_X} \geq$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \| p_n^0 \|_X \| \widetilde{p}_n \|_{L^2(\omega\times(0,T))}^2 + \delta - \| y_d^n \|_{X'} \right) = \infty,$$

lo cual es una contradicción con (29). De este modo $\widetilde{p} = 0$ en $\omega \times (0,T)$, lo que en ambos casos implica (por los resultados de continuación única; véase Saut y Scheurer [19]) que $\widetilde{p} \equiv 0$ en Q y por tanto $\widetilde{p}^0 \equiv 0$ en Ω.

De esta manera,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{J_{\varepsilon_n}(p_n^0; z_n, y_d^n)}{\| p_n^0 \|_X} \geq \liminf_{n\to\infty} \left(\delta - < y_d^n, \widetilde{p}_n^0 >_{X'\times X} \right) = \delta,$$

lo que contradice (29) y prueba (28).

Finalmente, señalamos que $J_{\varepsilon_n}(\widehat{p}^0(\varepsilon_n, z_n, y_d^n); z_n, y_d^n) \leq J_{\varepsilon_n}(0; z_n, y_d^n) = 0$, lo que es una contradicción con (28) y (27) y concluye el resultado.

■

Lema 12 *Supongamos (8) y (9) (resp. ninguna condición suplementaria). Sea $z \in L^2(Q)$. Sea $p_0 \in L^2(\Omega)$ dado. Entonces, si p_ε es la solución de $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})^*_\varepsilon$ (resp. $(\mathcal{P}_S\mathcal{L})^*_\varepsilon$) existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\| p_\varepsilon \|_{\mathcal{C}([0,T]:L^2(\Omega))} \leq e^{\alpha T} \| p^0 \|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varepsilon > 0 \ y \ z \in L^2(Q) \tag{30}$$

Demostración. Si multiplicamos en $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})^*_\varepsilon$ (resp. $(\mathcal{P}_S\mathcal{L})^*_\varepsilon$) por p_ε, para todo $t \in (0,T]$ tenemos que

$$\frac{1}{2} \| p_\varepsilon(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \| \Delta p_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega\times(t,T))} + k \| \nabla p_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega\times(t,T))} \leq$$

$$\frac{1}{2} \| p_\varepsilon(T) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| g_\varepsilon(z(x,t)) \|_{L^\infty(Q)} \| \Delta p_\varepsilon \|_{L^2(\Omega\times(t,T))} \| p_\varepsilon \|_{L^2(\Omega\times(t,T))}$$

(resp.

$$\frac{1}{2} \| p_\varepsilon(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \| \Delta p_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega\times(t,T))} + \| \nabla p_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega\times(t,T))} \leq$$

$$\frac{1}{2} \| p_\varepsilon(T) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| G(z(x,t)) \|_{L^\infty(Q)} \| p_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega\times(t,T))} \qquad).$$

Entonces, aplicando la desigualdad de Young, deducimos que

$$\frac{1}{2} \| p_\varepsilon(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2} \| \Delta p_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega\times(t,T))} \leq \frac{1}{2} \| p_\varepsilon(T) \|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \| p_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega\times(t,T))}$$

(resp.

$$\frac{1}{2} \| p_\varepsilon(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| \nabla p_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega\times(t,T))} \leq \frac{1}{2} \| p_\varepsilon(T) \|^2_{L^2(\Omega)} + k \| p_\varepsilon \|^2_{L^2(\Omega\times(t,T))} \quad)$$

y por tanto

$$\| p_\varepsilon(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \| p_\varepsilon(T) \|^2_{L^2(\Omega)} + k \int_t^T \| p_\varepsilon(\tau) \|^2_{L^2(\Omega)} \, d\tau.$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Gronwall, deducimos la siguiente desigualdad que lleva a (30)

$$\| p_\varepsilon(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \| p_\varepsilon(T) \|^2_{L^2(\Omega)} \, e^{k(T-t)} \qquad \forall \ t \in [0,T].$$

■

Lema 13 *Supongamos (2) y (3). Entonces, las soluciones $L_\varepsilon(z)$ de (25), con $\varepsilon > 0$ arbitarios (suficientemente pequeños) y $z \in L^2(Q)$, están uniformemente acotadas en $\mathcal{C}([0,T] : H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(Q)$. Por tanto $\{L_\varepsilon(z : T)\}$ es un subconjunto precompacto de $H^{-(1+\gamma)}(\Omega)$, $\forall \ \gamma > 0$.*

Demostración. Para todo $\varepsilon > 0$ y $z \in L^2(Q)$ denotamos por $\psi = \psi_\varepsilon(z)$ a la solución de

$$\begin{cases} -\Delta\psi(t) = L(t) & \text{en } \Omega \\ \psi = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{para todo } t \in [0,T].$$

Entonces, como $L = L_\varepsilon(z) \in \mathcal{C}([0,T] : L^2(\Omega))$ para todo $\varepsilon > 0$ y $z \in L^2(Q)$ (recordemos que $\{L \in L^2(0,T : E) : \ L_t \in L^2(0,T : E')\} \subset \mathcal{C}([0,T] : L^2(\Omega))$; véase e.g. Lions y Magenes [17]), tenemos que $\psi_\varepsilon(z) \in \mathcal{C}([0,T] : E)$. Ahora, si tomamos $t \in (0,T]$ y multiplicamos en (25) por ψ, mediante el producto de dualidad $< \cdot, \cdot >_{L^2(0,t:E')\times L^2(0,t:E)}$, obtenemos

$$\frac{1}{2} \parallel \nabla\psi_\varepsilon(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \parallel \nabla L_\varepsilon \parallel^2_{L^2(0,t:L^2(\Omega))} + k \parallel L_\varepsilon \parallel^2_{L^2(\Omega\times(0,t))} \leq$$

$$\frac{1}{2} \parallel y_0 \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \parallel h \parallel_{L^2(0,t:H^{-1}(\Omega))} \parallel L_\varepsilon \parallel_{L^2(\Omega\times(0,t))} +$$

$$\parallel g_\varepsilon(z) \parallel_{L^\infty(Q)} \parallel L_\varepsilon \parallel^2_{L^2(\Omega\times(t,T))} + \parallel g_\varepsilon(z)s_\varepsilon \parallel_{L^\infty(Q)} \parallel L_\varepsilon \parallel_{L^2(\Omega\times(0,t))} .$$

Nótese que

$$\parallel \nabla\psi_\varepsilon(t) \parallel^2_{L^2(\Omega)} = \parallel L_\varepsilon(t) \parallel^2_{H^{-1}(\Omega)} .$$

Entonces, tomando ε suficientemente pequeño y usando la desigualdad de Young se deduce que existe una constante $C > 0$, independiente de ε, z y t, tal que

$$\parallel L_\varepsilon(t) \parallel^2_{H^{-1}(\Omega)} + \parallel L_\varepsilon \parallel^2_{L^2((0,t)\times\Omega)} \leq C,$$

lo que concluye el resultado.

■

Lema 14 *Sea $y_0 \in H^1_0(\Omega)$. Supongamos (1). Sean $L_\varepsilon(z)$ las soluciones de (26) con arbitrarios $z \in L^2(Q)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $\{L_\varepsilon(z;T)\}$ es un conjunto precompacto de $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Si multiplicamos en (26) por $-\varepsilon\Delta L_\varepsilon(z)$ (en realidad hay que multiplicar en sentido de distribuciones por funciónes $-\varepsilon\Delta\xi$ donde $\xi \in \mathcal{C}^\infty_c(Q)$ aproxima en la topología de $L^2(0,T : E)$ a $L_\varepsilon(z)$ y pasar posteriormente al límite) se obtiene

$$\varepsilon \int_\Omega |\nabla L_\varepsilon(T)|^2 dx + \int_Q |\nabla\varepsilon\Delta L_\varepsilon|^2 dxdt + \varepsilon \int_Q (\Delta L_\varepsilon)^2 dxdt = \varepsilon \int_\Omega |\nabla y_0|^2 dx$$

$$+ \int_Q (G(z)L_\varepsilon - H(z))\varepsilon\Delta L_\varepsilon dxdt - < h, \varepsilon\Delta L_\varepsilon >_{L^2(0,T:H^{-1}(\Omega))\times L^2(0,T:H^1_0(\Omega))} .$$

Entonces, utilizando las desigualdades de Holder y Young, se deduce que

$$\parallel \varepsilon\Delta L_\varepsilon(z) \parallel_{L^2(0,T:H^1_0(\Omega))} \leq C \ \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ y } z \in L^2(Q). \qquad (31)$$

De manera análoga, si multiplicamos en (26) por $L_\varepsilon(z)$, es fácil probar que

$$\parallel L_\varepsilon(z) \parallel_{\mathcal{C}([0,T]:L^2(\Omega))\cap L^2(0,T:H^1_0(\Omega))} \leq C \ \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ y } z \in L^2(Q).$$

Entonces, de la ecuación de (26), deducimos que

$$\parallel \frac{\partial L_\varepsilon(z)}{\partial t} \parallel_{L^2(0,T:H^{-1}(\Omega))} \leq C \ \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ y } z \in L^2(Q).$$

Estas dos acotaciones implican (véase p.e. Simon [20]) que

$$\{L_\varepsilon(z);\ \varepsilon > 0,\ z \in L^2(Q)\}$$

es relativamente compacto en $L^p(0,T : L^2(\Omega))$ para todo $p < \infty$.

Ahora, para toda sucesión $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,R]$, tal que $\varepsilon_n \to \widetilde{\varepsilon}$ si $n \to \infty$ y $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(Q)$ consideramos la solución correspondiente L_n. Entonces, por las acotaciones anteriores y la ecuación de (26), existe $L \in L^\infty(0,T : L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T : H_0^1(\Omega))$ tal que $L_n \to L$ en la topología débil-$*$ de $L^\infty(0,T : L^2(\Omega))$ y débil de $L^2(0,T : H_0^1(\Omega)$. De aquí y (31) se deduce que $\varepsilon_n \nabla\Delta L_n \rightharpoonup 0$ en la topología débil de $L^2(Q)$. Además, si $\widetilde{\varepsilon} \neq 0$ entonces $L_n \to L$ en la topología débil de $L^2(0,T : E)$ y $\dfrac{\partial L_n}{\partial t} \to \dfrac{\partial L}{\partial t}$ en la topología débil de $L^2(0,T : E')$ y por tanto, $L \in \mathcal{C}([0,T] : L^2(\Omega))$ (véase p.e. Lions-Magenes [17]). Ahora, si pasamos al límite en (26), obtenemos que L es solución de

$$\begin{cases} L_t + \widetilde{\varepsilon}\Delta^2 L - \Delta L + AL = h + H & \text{en } Q \\ L = 0,\ \widetilde{\varepsilon}\Delta L = 0 & \text{en } \Sigma, \end{cases}$$

donde A y H son los límites de $G(z_n)$ y $H(z_n)$ respectivamente en la topología débil-$*$ de $L^\infty(Q)$. De aquí deducimos que si $\widetilde{\varepsilon} = 0$ entonces $L_t \in H^{-1}(\Omega)$ y también en este caso $L \in \mathcal{C}([0,T] : L^2(\Omega))$. Por tanto, en ambos casos, en el dato inicial se verifica $L(0) = y_0$.

El resultado se concluye observando que, de las ecuaciones que verifican L_n y L, se deduce que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\frac{1}{2} \parallel (L_n - L)(T) \parallel^2_{L^2(\Omega)} + \parallel \nabla(L_n - L) \parallel^2_{L^2(Q)} \leq C \parallel L_n - L \parallel_{L^2(Q)}$$

$$-\int_Q \varepsilon_n \nabla\Delta L_n(x,t) \cdot \nabla L(x,t)\ dxdt + \int_Q \widetilde{\varepsilon}\Delta L(x,t)\Delta L_n(x,t)\ dxdt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \blacksquare$$

Final de la demostración del Teorema 9. De (9) se deduce que existe una constante K_3, que depende de C_1, C_2 y M_1 pero independiente de ε, tal que

$$\parallel L_\varepsilon(z) \parallel_{\mathcal{C}([0,T]:H^{-1}(\Omega))} \leq K_3 \ \text{ para todo } \varepsilon > 0 \text{ y } z \in L^2(Q).$$

Entonces $\{L_\varepsilon(z;T),\ \forall\varepsilon > 0 \text{ y } \forall z \in L^2(Q)\}$ es un subconjunto relativamente compacto de $H^{-(1+\gamma)}(\Omega)$ para todo $\gamma > 0$. Aplicando el Lema 11, existe una constante K_4, que depende de C_1, C_2 y M_1 pero independiente de ε, tal que, si $\widehat{p}^0_\varepsilon$ es el mínimo de $J_\varepsilon(\cdot; z, y_d - L_\varepsilon(T))$, entonces $\parallel \widehat{p}^0_\varepsilon \parallel_{L^2(\Omega)} \leq K_4$ para todo $\varepsilon > 0$ y $z \in L^2(Q)$. El Lema 12 implica (23) con $K = e^{\alpha T} K_4$. La demostración para el caso semilineal es análoga.

$\blacksquare$

Demostración del Teorema 2. La primera parte es similar a la probada en el Teorema 1 de Díaz y Ramos [8] mediante la aplicación del Teorema de Punto Fijo de Kakutani al operador $\Lambda_\varepsilon : L^2(Q) \to \mathcal{P}(L^2(Q))$ definido por

$\Lambda_\varepsilon(z) := \{y_\varepsilon$ satisfaciendo $(\mathcal{P}_C\mathcal{L})_\varepsilon$, (22), con un control u_ε verificando (24)$\}$, donde la constante K de (24) depende de ε. Finalmente, si φ satisface (2) y (3), entonces el Lema 5 muestra (23), lo cual prueba (5) con $K = e^{\alpha T}K_4$. ■

Demostración del Teorema 1. Primer paso. Supongamos adicionalmente que $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Supongamos también que $\varphi'(s) \geq c > 0$ c.p.t. $s \in \mathbb{R}$ (resp. $h \in L^2(Q)$). Para todo $\varepsilon > 0$, sean v_ε y y_ε las funciones dadas en el Teorema 2. Como la ecuación de $(\mathcal{PC})_\varepsilon$ tiene lugar en $L^2(0,T : E')$, multiplicando por $y_\varepsilon \in L^2(0,T : E)$ y aplicando la desigualdad de Young (resp. Gronwall) se obtiene, gracias a la estimación uniforme (5) y las hipótesis sobre φ' o h, que existe una constante $C > 0$ independiente de ε tal que

$$\| y_\varepsilon \|_{L^\infty(0,T:L^2(\Omega))} + \int_Q \varphi'(y_\varepsilon)|\nabla y_\varepsilon|^2 dxdt \leq C. \tag{32}$$

De este modo, de (32) obtenemos que y_ε está uniformemente acotado en $L^\infty(0,T : L^2(\Omega))$ y por la ecuación de $(\mathcal{PC})_\varepsilon$, $(y_\varepsilon)_t$ está uniformemente acotado en $L^\infty(0,T : H^{-4}(\Omega))$. Entonces, como $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset H^{-4}(\Omega)$ con inclusión compacta, se deduce (véase Simon [20]) que y_ε es relativamente compacto en $\mathcal{C}([0,T] : H^{-1}(\Omega))$. Además, de (32) y la acotación de la función φ' ($\varphi' \in L^\infty(\mathbb{R})$ por (2)), deducimos que existe una constante $K > 0$ independiente de ε tal que

$$\int_0^T \| \nabla\varphi(y_\varepsilon) \|^2_{L^2(\Omega)} dt = \int_Q \varphi'(y_\varepsilon(x,t))\ \varphi'(y_\varepsilon(x,t))|\nabla(y_\varepsilon(x,t))|^2 dxdt < K.$$

De este modo, existe $y \in L^\infty(0,T : L^2(\Omega))$ y $\zeta \in L^2(0,T : H_0^1(\Omega))$ (recordemos que $\varphi(0) = 0$) tales que $y_\varepsilon \to y$ fuertemente en $L^2(0,T : H^{-1}(\Omega))$ y $\varphi(y_\varepsilon) \rightharpoonup \zeta$ débilmente en $L^2(0,T : H_0^1(\Omega))$. Pero el operador $Au := -\Delta\varphi(u)$, $D(A) := \{u \in H^{-1}(\Omega) :\ \varphi(u) \in H_0^1(\Omega)\}$ es maximal monótono sobre el espacio $H^{-1}(\Omega)$ (véase Brézis [1]). Así, la extensión $\mathcal{A}$ de A también es un operador maximal monótono sobre $L^2(0,T : H^{-1}(\Omega))$ (véase Brézis [2]), Ejemplo 2.33). Finalmente, como todo operador maximal monótono es fuertemente-débilmente cerrado (véase Brézis [2], Proposición 2.5), obtenemos que $\zeta = \varphi(y)$ en $L^2(0,T : H_0^1(\Omega))$. De hecho, de la estimación (5) obtenemos que $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ débilmente en $L^2(\omega \times (0,T))$, con

$$\| v \|_{L^2(\omega\times(0,T))} \leq K. \tag{33}$$

Entonces deducimos que $y \in \mathcal{C}([0,T] : H^{-1}(\Omega))$ es solución de $(\mathcal{PC})$. Además, como $\| y_\varepsilon(T) \|_{L^2(\Omega)}$ está uniformemente acotada y $y_\varepsilon(T) \to y(T)$ fuertemente en $H^{-1}(\Omega)$, deducimos que $y_\varepsilon(T) \rightharpoonup y(T)$ en la topología débil de $L^2(\Omega)$, lo que implica que

$$\| y(T) - y_d \|_{H^{-(1+\gamma)}(\Omega)} \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \| y_\varepsilon(T) - y_d \|_{H^{-(1+\gamma)}(\Omega)} \leq \delta.$$

Segundo paso. Sea φ como en las hipótesis del Teorema 1. Es claro que podemos aproximar φ por $\varphi_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, φ_n no decreciente, satisfaciendo (2) y (3) con las mismas constantes k, C_1, C_2 y M_1 que las dadas para φ. Entonces los respectivos controles v_n construidos como en el paso 1 están uniformemente acotados (recordemos (33)) y de este modo la conclusión se deduce de resultados conocidos expresando la dependencia continua en $\mathcal{C}([0,T]:H^{-1}(\Omega))$ de las funciones y soluciones de $(\mathcal{PC})$ (véase e.g. Damlamian [3], Teorema 2.3).

■

Las demostraciones de los Teoremas 3 y 4 son completamente análogas, una vez establecidos el Teorema 9 y los Lemas 8 y 14. Nótese que, sin perdida de generalidad, se puede suponer que $y_0 \in H_0^1(\Omega)$ pues en otro caso basta tomar $v \equiv 0$ en $\omega \times (0,\lambda)$ con $0<\lambda<T$, reemplazar y_0 por $y(\widehat{\lambda})$ con $\widehat{\lambda} \in (0,\lambda)$ y razonar análogamente en $\Omega \times (\widehat{\lambda},T)$.

■

Corolario 15 *El resultado de controlabilidad aproximada sobre $H^{-1-\gamma}(\Omega)$, $\gamma>0$, probado en el Teorema 1 para el problema $(\mathcal{PC})$, permanece válido en el espacio $H^{-1}(\Omega)$ si se verifica la siguiente propiedad:*

$$(\mathcal{H}_L) \qquad \{L_\varepsilon(z):\ z\in L^2(Q),\ \varepsilon\in(0,R]\} \ \textit{es precompacto en } H^{-1}(\Omega).$$

Demostración. Basta seguir los mismos pasos que en las demostraciones de los Teoremas 1 y 2, utilizando la hipótesis de precompacidad en $H^{-1}(\Omega)$ de este corolario en lugar del resultado de precompacidad en $H^{-1-\gamma}(\Omega)$ del Lema 13.

■

Referencias

[1] H. Brézis, Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, en *Nonlinear Functional Analysis*, E. Zarantonello ed., Academic Press, New York, 1971, pp. 101–156.

[2] H. Brézis, *Operateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[3] A. Damlamian, Some results on the multi-phase Stefan problem, *Comm. Part. Diff. Eq.*, 2 (1977), pp. 1017–1044.

[4] J. I. Díaz, Approximate controllability for some nonlinear parabolic problems, en *System Modelling and Optimization*, eds.: J. Henry y J. P. Yvon, Springer-Verlag, Londres, 1995, pp. 128–143.

[5] J. I. Díaz y A. V. Fursikov, A simple proof of the approximate controllability from the interior for nonlinear evolution problems, *Applied Math. Letters*, 7 (1994), pp. 85–87.

[6] J. I. Díaz y A. M. Ramos, Resultados positivos y negativos sobre la controlabilidad aproximada de problemas parabólicos semilineales, en las actas del *III Congreso de Matemática Aplicada; XIII C.E.D.Y.A.*, eds.: A. C. Casal et al., Univ. Politécnica de Madrid, 1993, pp. 640–645.

[7] J. I. Díaz y A. M. Ramos, Positive and negative approximate controllability results for semilinear parabolic equations, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid*, T. LXXXIX, 1$^{\text{o}}$- 2$^{\text{o}}$ (1995), pp. 11–30.

[8] J. I. Díaz y A. M. Ramos, On the Approximate Controllability for Higher Order Parabolic Nonlinear Equations of Cahn-Hilliard Type, aparecerá en las actas de la *International Conference on Control and Estimation of Distributed Parameter Systems*, Vorau (Austria).

[9] J. I. Díaz y A. M. Ramos, Approximate Controllability and Obstruction Phenomena for Quasilinear Diffusion Equations, Aparecerá en el libro *Computational Science for the 21st Century*, eds.: J. Periaux et al.. Será publicado por John Wiley & Sons, Ltd.

[10] C. Fabre, J. P. Puel y E. Zuazua, Contrôlabilité approchée de l'équation de la chaleur semi-linéaire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, T. 315 (1992), pp. 807–812.

[11] C. Fabre, J. P. Puel y E. Zuazua, Approximate controllability of the semilinear heat equation, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 125A (1995), pp. 31–61.

[12] J. Henry, *Contrôle d'un Réacteur Enzymatique à l'Aide de Modèles à Paramètres Distribués. Quelques Problèmes de Contrôlabilité de Systèmes Paraboliques*, Ph.D. thesis, Université Paris VI, 1978.

[13] A. S. Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of nonlinear degenerate second-order parabolic equations, *Russ. Math. Survs.*, 42 (1987), pp. 169–222.

[14] J. L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux derivées partielles*, Dunod, París, 1968.

[15] J. L. Lions, *Quelque méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier Villars, 1969.

[16] J. L. Lions, Remarques sur la contrôlabilité approchée, en las actas de las *Jornadas Hispano-Francesas sobre Control de Sistemas Distribuidos*, Univ. de Málaga, 1990, pp. 77–88.

[17] J. L. Lions y E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Tomo I y II, Dunod, París, 1968.

[18] P. Puig Adam, Matemática y Cibernética, *Memorias de la RAC*, Discurso de Recepción en la Real Academia de Ciencias de Madrid, 1952.

[19] J. C. Saut y B. Scheurer, Unique continuation for some evolution equations, *J. Differential Equations*, Vol. 66, N. 1 (1987), pp. 118–139.

[20] J. Simon, J., Compact Sets in the Space $L^p(0, T; B)$, *Annali di Mat. Pura ed Appl.*, Serie 4, 146 (1987), pp. 65–96.

[21] A. Valle, Un problème de contrôle optimum dans certaines équations différentielles d'evolution, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 20 (1966), pp. 25–30.

[22] A. Valle, *Problemas de control óptimo en ecuaciones diferenciales abstractas de evolución*, Tesis Doctoral, Fac. de Ciencias, Univ. Complutense de Madrid, 1966.