SOBRE EL NÚMERO *e*. ALGUNAS IDEAS PARA LA SECUNDARIA Y EL BACHILLERATO

Roberto Rodríguez del Río
IES Valmayor, Valdemorillo - Departamento de Matemática Aplicada
Facultad de Ciencias Químicas - Universidad Complutense de Madrid

Supongamos que depositamos 1000 euros en una cuenta bancaria a un interés *compuesto* anual de un 10%. Ciertamente no corren tiempos en los que nos ofrezcan tan altos tipos de interés, pero no pasa nada por suponerlo. ¿Qué cantidad de dinero tendremos al cabo de un año? 1000(1+0'10)=1100 euros. No está mal, sobre todo si después no tuviéramos que pagar impuestos sobre esos intereses. Pero imaginemos que dejamos el dinero un año más, al cabo de dos años desde que depositamos los 1000 euros iniciales tendremos $1000(1+0,10)^2=1210$ euros. Al cabo de tres años, si no sacamos el dinero en ningún momento, habría $1000(1+0,10)^3=1331$ euros. Y al cabo de diez años sin tocar el dinero, habrá en nuestra cuenta $1000(1+0,10)^{10}=2593,74$ euros.

Es una cantidad de dinero interesante, sobre todo si pensamos en los 1000 euros iniciales que habíamos depositado, pero 10 años son muchos años y en los tiempos que corren en los que todos queremos beneficios rápidos, no parece la inversión más interesante.

Veamos lo que nos ofrece otro banco. Buscando y buscando encontramos otra entidad que nos ofrece también un 10% de interés anual, pero ahora el pago de intereses se hace semestralmente, es decir, hay pago de intereses dos veces al año y los intereses de la primera mitad del año se acumulan al capital inicial para producir nuevos intereses en la segunda mitad. Seguro que esto es mejor que lo que me ofrecían antes. En efecto, ahora al cabo de seis meses tenemos $1000\left(1+\frac{0,10}{2}\right)=1050$ euros, y al cabo de un año $1000\left(1+\frac{0,10}{2}\right)^2=1102,50$ euros. Sin duda esta opción es mucho mejor. Claro, que puestos a pedir, mucho mejor que sea pago mensual de intereses, de esta forma, cobramos intereses ¡12 veces al cabo de un año! De hecho, hay bancos que ofrecen esta opción en eso que llaman *cuentas de alta rentabilidad.* Bien, pues en nuestro caso, los 1000 euros que vamos a depositar en la cuenta de alta remuneración se convertirán, al cabo de un año, en $1000\left(1+\frac{0,10}{12}\right)^{12}=1104,71$ euros.

Hay bancos que ofrecen liquidación de intereses mensuales. Pero, ¿podrían ofrecer pago diario de intereses o se arruinarían? ¿Y pago de intereses cada hora, noches incluidas? ¿O cada segundo, o cada décima? ¿O a cada instante?...

Vamos a hacer más cálculos para intentar ver a dónde nos lleva todo esto. Para que los cálculos sean más sencillos, vamos a pensar que depositamos 1 euro en una *supercuenta* en la que nos ofrecen un interés anual del 100%. Si el pago de intereses es anual, las cuenta es muy sencilla, 1+1=2 euros al cabo del año. Si el pago es semestral, la cantidad a final de año es $\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=2,25$ euros. Si el pago es mensual, $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}=2,613$ euros.

¿Hasta dónde aumentará esta cantidad? ¿Hasta el infinito? Hagamos sólo algunos cálculos más. Si el pago de intereses se produjera diariamente, al final de año, tendríamos $\left(1+\frac{1}{365}\right)^{365}=2,71456748$ euros. La verdad, algo decepcionante. Esperábamos mucho más. Pero no hay mucho más que esperar porque, de hecho, si el pago de intereses se produjese a cada instante, la cantidad es muy poco mayor. En efecto, si se hacen N pagos al cabo del año y hacemos que N tienda a infinito, entonces $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$, tiende al número (aproximado)

$$e=2,718281828459\ldots$$

El número anterior es el denominado número *e.* A pesar de que fue Leonhard Euler (1707-1783) el matemático que más descubrimientos hizo relativos a este número (de hecho, Euler fue quien empezó a denominarlo con la letra *e*), el primero en estudiar el límite de la expresión $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ como acumulación de intereses fue Jacob Bernoulli (1654-1705). Sin duda es esta una forma de introducir la idea del número *e* que, además de su interés histórico, resulta sumamente interesante desde el punto de vista didáctico y sería bueno que figurase en los libros de texto de matemáticas.

Leonhard Euler (1707-1783)

Leonhard Euler calculó el número *e* con mucha exactitud, para lo que desarrolló las herramientas adecuadas, sino que supo ver su utilidad. Por ejemplo, en 1748, Euler se planteaba problemas de crecimiento como los siguientes en su *Introductio in analysin infinitorum*:

«Si la población en una cierta región se incrementa anualmente una trigésima parte y en cierto momento había 100000 habitantes, ¿cuál será la población dentro de 100 años?» (§110)

La solución pasa por calcular una expresión de la forma $100000\left(1+\frac{1}{30}\right)^{100}$.

«A un hombre se le han prestado 400000 florines a un interés anual del 5 por ciento…» (§111)

Jacob Bernoulli (1654-1705)

Lo que nos llevaría a calcular expresiones de la forma $400000(1+0{,}05)^N=1210$, para obtener el capital que habría que devolver al cabo de *N* años.

Como hemos mencionado antes, Euler logró calcular el número *e* con mucha precisión. Para ello manipuló la expresión que había utilizado Daniel Bernoulli. Euler desarrolló la expresión $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ utilizando la fórmula del binomio de Newton:

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 1+\frac{N}{N}+\frac{N(N-1)}{2!}\frac{1}{N^2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\frac{1}{N^3}+\ldots$$

$$=1+1+\frac{1\left(1-\frac{1}{N}\right)}{2!}+\frac{1\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)}{3!}+\ldots$$

Ahora, si hacemos tender *N* a infinito, el número *e* aparece como la suma infinita

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

Aunque el último paso, precisamente el paso al límite no es correcto del todo. El mismo argumento utilizado en otros contextos puede resultar peligroso, por ejemplo,

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\ldots+\frac{1}{N}=0+0+0+\ldots+0=0$$

Sin embargo, Euler tenía esa sorprendente intuición que sólo tienen los genios que hacía que utilizase los argumentos arriesgados precisamente en esos casos en los que funcionaban.

Bien, ya tenemos una expresión diferente para el número *e,* una expresión que aún siendo bastante sencilla de obtener no suele encontrarse en los libros de bachillerato. ¿En qué medida ha mejorado nuestra situación? La tabla siguiente lo pone de manifiesto. Ha mejorado la eficiencia en el cálculo. En efecto, con la fórmula de Bernoulli necesitamos calcular su valor para valores de N muy grandes hasta aproximarnos a los primeros decimales exactos del número e, sin embargo, con la expresión de la suma infinita su convergencia es mucho más rápida.

N	$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$	$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{N!}$
1	2,000	2,0
2	2,250	2,5
3	2,370	2,66
4	2,441	2,708
5	2,488	2,7166
10	2,594	2,71828152
20	2,653	2,7182818284590452353339
25	2,666	2,7182818284590452353602874687
28	2,671	2,71828182845904523536028747135254

Las ventajas de esta nueva expresión para el número e son muchas. No sólo la rapidez en el cálculo. También se puede utilizar para dar una demostración asequible de la irracionalidad del número. Este hecho, su irracionalidad fue probado en 1815 por primera vez por el matemático francés Joseph Fourier (1768-1830).

Joseph Fourier (1768-1830)

Se puede encontrar en *El libro de las demostraciones* de M. Aigner y G.M. Ziegler (Nivola, Madrid, 2005) una demostración de la irracionalidad del número e adaptable a un curso de Bachillerato.

Para finalizar, indicaremos algunos textos (algunos ya han aparecido) en los que se pueden encontrar ideas interesantes para ilustrar cuestiones relativas al número e. Sin duda que los profesores profundicemos en nuestro propio conocimiento de las cosas siempre nos permitirá disponer de más y mejores herramientas a la hora de enseñar matemáticas.

Bibliografía

M. AIGNER, G. M. ZIEGLER. *El libro de las demostraciones*. Nivola, Madrid, 2005.

E. HAIRER, G. WANNER. *Análisis by its History*. Springer-Verlag, New York, 1996.

E. MAOR. *The Story of a Number*. Princeton University Press, New Jersey, 1994.

J. A. PAULOS. *Más allá de los números*. Tusquets, Barcelona, 2003.

VARIOS AUTORES. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley/U.A.M., Madrid, 1999.