APUNTES DE matemáticas

Comienza Ian Stewart, en su libro *De aquí al infinito*, afirmando que uno de los mayores problemas a los que se enfrenta las matemáticas es el de explicar a los demás de qué se trata. Sin embargo, en los últimos años se ha hecho un gran esfuerzo en diversos ámbitos para que esta disciplina sea conocida y considerada con respeto y admiración por amplios sectores de nuestra sociedad. Quizá nos encontremos en una época dulce de las matemáticas.

En las últimas décadas se ha producido un gran avance de las matemáticas. Es, pues, necesario que aporten su visión expertos en la materia para ayudarnos a todos a conformar, aunque sea de una manera superficial, los campos en los que están presentes.

Es imprescindible que el profesor de matemáticas, independiente de su formación universitaria como matemático, físico, químico, biólogo, ingeniero…se forme e informe de cuáles son los avances de las matemáticas en los últimos tiempos, además, por supuesto, de la formación en didáctica necesaria para desarrollar su labor diaria en el aula.

Por ello, iniciamos con estos Apuntes un ciclo con el nombre de *Matemáticas en aula y en la vida real*, que ha tenido sus inicios en la Universidad de Otoño, y que pretendemos continuar en diversos artículos y seminarios.

Enrique Zuazua es Catedrático de la Universidad Autónoma y Premio Nacional de Investigación «Julio Rey Pastor» en Matemáticas y Tecnologías de la Información y la Comunicación (2007), por su contribución en los ámbitos de las teorías de ecuaciones en derivadas parciales y del control. Además, es director del Instituto Madrileño de estudios Avanzados (IMDEA-Matemáticas), cuyo extracto del discurso inaugural del presente curso académico nos ha facilitado para publicar en estos Apuntes de Matemáticas.

Julián Aguirre, Catedrático de la Universidad del País Vasco, nos muestra de forma clara y divulgativa, un tema tan apasionante como es la Geometría Fractal y sus innumerables aplicaciones.

María Moreno, profesora del Instituto de Enseñanza Secundaria Alameda de Osuna, aborda de forma muy didáctica algunas ideas y problemas para ayudar a los alumnos a hacer conjeturas.

Adoración Morales y Iosu Martínez son profesores del Colegio Nuestra Señora del Recuerdo de Madrid y describen una experiencia de aprendizaje en Matemáticas y Lengua, tanto en Primaria como en Secundaria, mediante apoyo en la Red.

Antonio Nevot
Roberto Rodríguez
Coordinadores del Seminario de Matemáticas del CDL

IMDEA-MATEMÁTICAS:
UNA NUEVA OPORTUNIDAD PARA LA INVESTIGACIÓN DE EXCELENCIA E INTERDISCIPLINAR EN MATEMÁTICAS

Enrique Zuazua Iriondo
Catedrático de Matemática Aplicada,
Universidad Autónoma de Madrid
Director de IMDEA-Matemáticas

ESTE artículo pretende recorrer los caminos que han llevado a la creación de IMDEA, agradecer a todos los agentes y personas involucrados y por supuesto trasmitir el espíritu de la iniciativa.

Al investigador de hoy, a la hora de desarrollar su actividad profesional se le presentan algunos dilemas que debe resolver con éxito.

Primer dilema: Multidisciplinariedad frente especialización

El siglo XXI nos ha situado ante una difícil paradoja: Por un lado, en todos los ámbitos de la actividad humana se nos pide un nivel de especialización mayor para poder así realizar contribuciones de más calado. Al mismo tiempo, la sociedad de la información, avanza con paso firme hacia la globalización y se demanda saber más de muchas más cosas.

Las Ciencias no son ajenas a esta situación y viven una auténtica revolución. En efecto, los científicos, por una parte, nos enfrentamos a la necesidad de especializarnos para poder realizar aportaciones de envergadura, pero para avanzar resulta cada vez más necesaria una ciencia multidisciplinar que, sin limitarse a las fronteras propias de cada disciplina, sea capaz de proporcionar avances trascendentes para el progreso de la sociedad cada vez más tecnológica y a su vez, sensibilizada con la salud y el medioambiente.

Segundo dilema: Élite científica frente aplicación de la ciencia al entorno del I+D+i

En la actualidad no es suficiente desarrollar una investigación de élite en una determinada disciplina. La sociedad de hoy en día busca además que los avances científicos contribuyan al desarrollo de sus ciudades, sus regiones y sus países. En definitiva, la ciencia moderna no sólo debe ser excelente en lo científico, sino también en su aplicación y contribución a la sociedad que es por otro lado lo que persiguen las agencias gestoras y financiadoras de la Ciencia.

Las Matemáticas no son ajenas a este complejo escenario global al que debemos añadir algunas cuestiones internas que necesitan también respuestas o, al menos, tomas de posición en el día a día. Entre estas cuestiones debemos destacar:

1. El rigor de las Matemáticas, fuertemente enraizado en la Lógica, que ha de ser compatible con dar solución a los retos que plantea nuestra sociedad en plazos que a los matemáticos se nos antojan con frecuencia cortos en exceso. Proyectos, entregables, objetivos, impactos, citas, plazos, gestión, llamadas, convocatorias forman parte de nuestro quehacer cotidiano.
2. Por otro lado, en su cooperación con el mundo tecnológico, el matemático debe asimilar que, en ciertas ocasiones, los teoremas, producto último del pensamiento matemático, no son necesariamente el

modo en que nuestro entorno nos valora sino que lo hace a través de recetas mucho más elementales (extraídas de aquellos teoremas), que a veces se nos antojan simplistas (en su forma pero no es su contenido), que son más transmisibles y utilizables por nuestra sociedad tecnológica.

En definitiva, nos referimos al reto que supone hacer una matemática aplicada a los problemas concretos que la tecnología presenta, al estilo de la que ya realizaron nuestros grandes maestros: Newton, Gauss, Euler, etc.

La organización actual del mundo fuertemente globalizado en el que vivimos, establece un claro imperativo: no hay futuro para una sociedad y cultura que no disponga de una ciencia de calidad, excelentemente planificada y capaz de encarar con éxito retos tecnológicos en periodos sostenidos en el tiempo.

De ahí la necesidad de planificar la Ciencia a largo plazo, de manera que no dependa de los avatares políticos, ni se sienta afectada por las incertidumbres económicas, las fronteras geopolíticas, y que sea capaz de sacar adelante sus proyectos con los mejores RRHH disponibles en un mercado mundial.

Pero, para alcanzar esa meta, es necesario un marco de acción, unas herramientas de las que hasta hace muy poco no disponíamos en España.

El modelo de una universidad de calidad es la base de toda investigación científica. Pero parece a veces resentir la fatiga derivada de la dificultad de atender simultáneamente, con los mismos criterios, con el mismo personal, a una docencia cada vez más polifacética e individualizada, y a una investigación puntera que cubra desde los ámbitos más básicos hasta los más tecnológicos y aplicados.

La Comunidad de Madrid, consciente de esta situación, ha impulsado de manera decidida la iniciativa *IMDEA: Instituto Madrileño de Estudios Avanzados*, como una red de Institutos que comparten la misión de ser centros de referencia a nivel internacional, a través de la excelencia, la internacionalización, la multidisciplinaridad y la interacción con el I+D+i. Las Matemáticas son una de las disciplinas elegidas en este nuevo y valiente impulso a la Ciencia de la Comunidad de Madrid. Como matemáticos creemos que lo son por su centralidad en el universo de las ciencias, por su capacidad de aportar a la sociedad y tecnología intuiciones e ideas innovadoras clave, de manera directa o a través de sus modelos de juguete, de su universo de epsilons y deltas. No en vano las matemáticas y el lenguaje son posiblemente las dos máximas expresiones de nuestra especie humana y civilización.

Desde sus comienzos, IMDEA Matemáticas ha contado en su dirección con grandes profesionales. En el primer grupo de trabajo que establecimos para poner en marcha esta iniciativa, tuve la suerte de contar con la colaboración de Manuel de León, José Luís González Llavona y Alberto Ibort, respectivamente del CSIC, UCM y UC3M. Este grupo plasmó las ideas claves sobre las que se desarrolló el proyecto IMDEA Matemáticas:

- La importancia de crear un centro de referencia en Matemáticas Aplicadas y Computacional, competitivo a nivel internacional y basado en un personal de excelencia.
- La necesidad de desarrollar este centro como una estructura nueva, complementaria, que no restara a las ya existentes sino que aportara a cada una de ellas valor añadido a través de estrategias cooperativas.
- La importancia de que este centro no sólo fomente las iniciativas de excelencia que pudieran surgir desde cualquier ámbito de las Matemáticas, sino que también responda a nuevos retos científicos, con nuevas metodologías y equipos, entre los que destaca una investigación matemática interdisciplinar, más orientada a la computación.
- La necesidad de cooperar con el entorno industrial y el I+D+i, contribuyendo en particular a transmitir algo que es una realidad, tal vez no demasiado conocida: las nuevas generaciones de matemáticos, aunque no se hayan quitado de encima el polvo de la tiza, pues siguen trabajando con frecuencia en las pizarras, están preparados para escuchar a la sociedad y a sus diversos agentes y aportar soluciones a sus problemas en forma de estudios, de algoritmos, de programas, de simulaciones visualizables, contrastables, cuantificables, lejos ya de aquél autismo del que las Matemáticas se tuvieron que dotar en nuestro país para establecer sólidamente sus cimientos....
- Y por último, pero no menos importante, el valor de adoptar modos de funcionamiento nuevos, más flexibles, donde los gestores de la ciencia sean más proactivos y aporten valor añadido a los resultados de la investigación.

Con este espíritu surgió el Instituto IMDEA Matemáticas.

IMDEA-Matemáticas es, como decíamos, una iniciativa nueva, de espíritu fuertemente cooperativo, que cuenta con:

- El respaldo de la Comunidad de Madrid.
- Un Consejo Científico internacional, multidisciplinar, de gran experiencia y reconocido prestigio que es para nosotros el mejor aval para encarar los retos científicos que nos proponemos y a quienes agradecemos hoy muy especialmente la presencia.
- Un Patronato que reúne a las Instituciones de nuestra Comunidad, y a un buen número de empresas de excelencia que identifican las matemáticas como prioritarias, así como un colectivo de científicos y profesionales del máximo nivel.
- Un presidente del Patronato, el profesor Juan José Manfredi, de la Universidad de Pittsburg, madrileño de nacimiento, que ha colaborado en el proyecto desde sus inicios de manera generosa dándole visión y dimensión y que, a pesar de sus esfuerzos, no ha podido estar hoy con nosotros a causa de compromisos ineludibles en su Universidad.
- Un grupo de investigadores que empezarán a incorporarse a partir del próximo 1 de Octubre, que han sido captados a través de una llamada internacional, cuyos resultados, por la cantidad y calidad de interesados, nos han sorprendido y que son claro indicador que IMDEA-Matemáticas surge en el lugar preciso en el momento correcto. ¿Tal vez esto sea una manifestación más del acierto de la famosa frase de Albert Einstein al asegurar que «lo más incomprensible del éxito de las Matemáticas es su validez para comprender el mundo?»
- Unos proyectos realmente innovadores, algunos de ellos ya en marcha, como por ejemplo la colaboración con AIRBUS-E e INTA en el ámbito del diseño óptimo en aeronáutica y la computación de altas prestaciones empleando nuevos paradigmas.
- Un proyecto de centro de computación aplicado que la Universidad Autónoma de Madrid y el Parque Científico de Madrid se han ofrecido amablemente a acoger en su seno y que puede ser el complemento ideal para un Instituto, IMDEA, que se ocupará no sólo del fomento de la ciencia básica de la más alta calidad.
- Y por último, pero no por ello menos importante: Unas instalaciones en el Campus de Cantoblanco y una sede definitiva en fase de rehabilitación.

IMDEA Matemáticas tiene en estos momentos líneas de trabajo abiertas en diversos campos de las Matemáticas, con diferente grado de implicación y orientaciones diversas, algunas más teóricas y otras más aplicadas. Pero todas estas líneas comparten el objetivo de hacer a IMDEA:

- Una institución joven que pretende convertirse en un centro de referencia europeo e internacional de las Matemáticas.
- Un centro capaz de captar a los mejores científicos y combinar experiencia y juventud en un equipo que comparta el espíritu de IMDEA sin caer en el voluntarismo.
- Un centro altamente autofinanciable a través de proyectos de envergadura creando así una Institución Científica moderna que combine Ciencia de máxima calidad con su aplicación tecnológica.

En estos momentos en España se discute el futuro de la Ciencia, de las Matemáticas, y su articulación, con plazos a veces imposibles. Creemos que IMDEA-Matemáticas e IMDEA en general son una aportación honesta y valiosa, digna de tener en cuenta. Las iniciativas de calidad necesitan de su tiempo de maduración justo, son incompatibles con las prisas pero necesitan a su vez de la máxima agilidad en su impulso y desarrollo. IMDEA apunta en esta dirección. Algunos de los mimbres con los que ha sido tejida como son la libre competencia, la internacionalización de sus procesos de selección, evaluación y seguimiento, son sin duda elementos trasladables a cualquier iniciativa de impulso a la Ciencia pues el futuro será sólo de las Instituciones que se asienten sobre sólidas bases, con el mejor proyecto científico-tecnológico y con gestores y científicos de excelencia. No hay atajos hacia el futuro. Un centro con aspiraciones, debe estar dispuesto a competir en un mercado libre y global.

Han sido muchos los colegas que nos han ayudado y apoyado en el diseño del plan científico. En el libro que hemos editado con una veintena de viñetas sobre diversos aspectos de la Matemática actual podrán encontrar una pequeña muestra. Gracias a todos.

GEOMETRÍA FRACTAL

Julián Aguirre Estibález
Catedrático de Análisis Matemático
Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

Fractales en la naturaleza

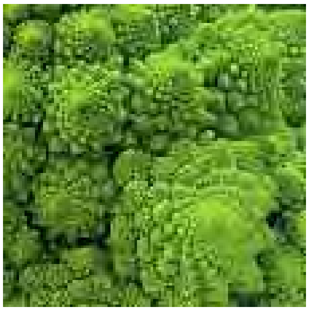
En 1623, Galileo desvelaba el idioma en que está escrito el Universo:

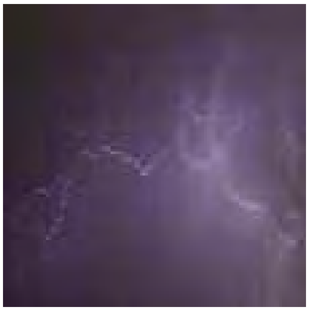
«… es el de las Matemáticas, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras Geométricas…»

Sin embargo, en la naturaleza no vemos triángulos, círculos o esferas. La geometría euclídea no resulta adecuada para describir la sutil complejidad de las irregularidades de la naturaleza. Como dice Benôit Mandelbrot (1924–), inventor del término *fractal*:

«…Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, la corteza de un árbol no es suave y la luz no viaja en línea recta.»

La *geometría fractal* permite estudiar de manera científica formas naturales como la del árbol, romanesco, copo de nieve y rayo de las fotografías, en las que apreciamos irregularidades, estructura en todas las escalas, y autosemejanza, es decir, un parecido de las partes con el todo. Pero no sólo la naturaleza produce objetos fractales. También la industria ha comenzado a explotar las formas fractales para la producción por ejemplo de antenas, difusores de fluidos e incluso camuflaje militar.



Los antecedentes de los fractales los encontramos en construcciones patológicas de figuras planas con propiedades contrarias a toda intuición. Los primeros ejemplos son curvas continuas, que pueden dibujarse en un sólo trazo sin levantar el lápiz del papel, pero que no tienen tangente en ningún punto, y que provocaron el siguiente comentario de Charles Hermite (1822-1901):

«El análisis matemático quita con una mano lo que da con la otra. Huyo con miedo y espanto de ese deplorable mal, funciones continuas sin derivada.»

La curva de Koch

Una de las más conocidas es debida al matemático sueco Helgen von Koch (1870–1924), construida a partir de un segmento rectilíneo, procediendo así:

1. Se divide el segmento en tres partes iguales;
2. Se sustituye la parte central por un triángulo equilátero sin la base;
3. Se repite el proceso con cada uno de los cuatro segmentos resultantes.

El resultado de iterar este proceso hasta el infinito, es una curva de longitud infinita que no tiene tangente en ninguno de sus puntos.

Giusepe Peano (1858-1932) y David Hilbert (1862-1943) construyeron ejemplos aún más contrarios a la intuición: curvas que llenan el plano, y cuyo dibujo es un cuadrado sólido.

El triángulo de Sierpinski

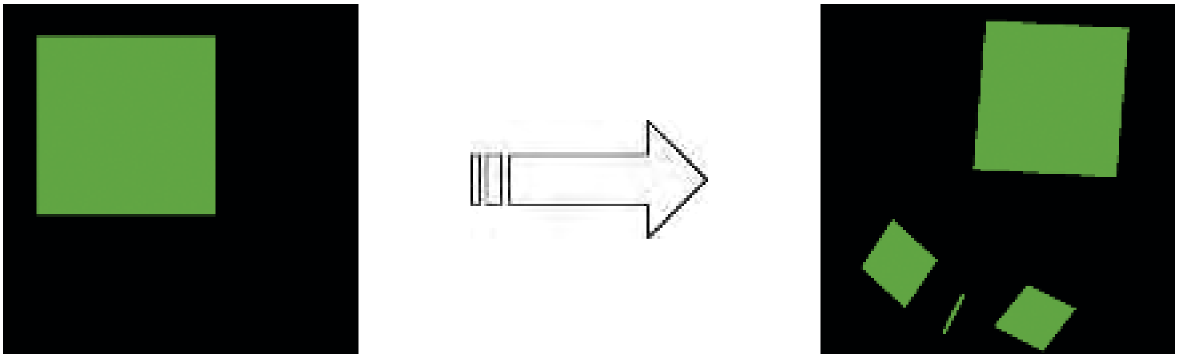
Waclaw Sierpinski (1882–1969) ideó el conocido como triángulo de Sierpinski. Para su construcción se parte de un triángulo, y se repite el siguiente proceso hasta el infinito:

1. Se divide el triángulo en cuatro triángulos iguales;
2. Se elimina el triángulo del medio.

Se trata de una generalización de una construcción debida a Georg Cantor (1845–1918), conocido como el creador la teoría de conjuntos.

Sistemas iterados de funciones

La curva de Koch, el triángulo de Sierpinski y gran parte de los fractales se construyen con un mismo mecanismo: una regla sencilla que se repite una y otra vez en un proceso de retroalimentación (*feedback*), en el que el resultado de aplicar la regla a un dato, se utiliza como dato para la siguiente iteración. Así se construyen fractales mediante *sistemas iterados de funciones*, siendo uno de los más conocidos el helecho de Barnsley. Partiendo de una figura cualquiera, como el cuadrado verde de la izquierda, se hacen cuatro *fotocopias* deformadas de una cierta manera, se giran y se trasladan, y se forma una nueva figura, con la que se repite el proceso. La fotocopiadora es aquí una metáfora de una función entre puntos del plano.



El número de copias, la deformación que sufre cada una de ellas y su posterior colocación permiten generar una variedad infinita de fractales, algunos que imitan formas naturales, y otros patrones geométricos.

Los mamíferos y otros animales superiores tienen simetría bilateral o de reflexión, es decir, se dividen en dos partes, una imagen especular de la otra. Muchas flores, como las margaritas, tienen simetría de rotación. Los ejemplos de fractales que hemos visto tienen una forma de simetría distinta: son iguales a la unión de un número finito de copias de si mismos. Es lo que se conoce como *autosemejanza*, y es una de las características que define un fractal.

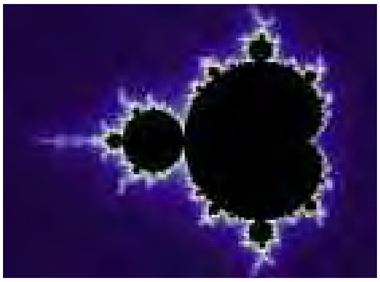
El conjunto de Mandelbrot

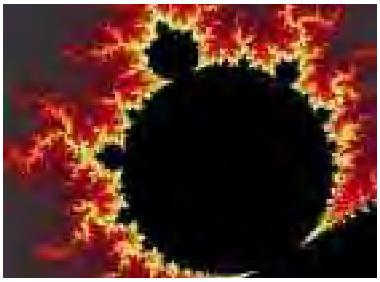
Otra fuente de fractales es la iteración de funciones de variable compleja. Los *números complejos* son una extensión de los números reales, introducidos para poder resolver ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$, de las que se dice que no tiene solución. En efecto, el cuadrado de un número real nunca es negativo, y al sumarle uno no puede dar cero. Por ello se ideó la *unidad imaginaria*, representada por i, con la propiedad de que $i^2 = -1$. Los números complejos son de la forma $z = x + y\,i$, donde x e y son números reales. De la misma manera que representamos los números reales en una recta, los números complejos se representan en un plano, identificando $z = x + y\,i$ con el punto de coordenadas (x,y). Los números complejos se pueden sumar y multiplicar, y a efectos de lo que aquí nos ocupa, podemos definir una función compleja que a z le hace corresponder $z^2 + c$, donde c es un parámetro también complejo. Algunos de los fractales más bellos y complicados de las matemáticas, entre ellos el conjunto de Mandelbrot, se obtienen al aplicar el proceso de retroalimentación a esta familia de polinomios de segundo grado.

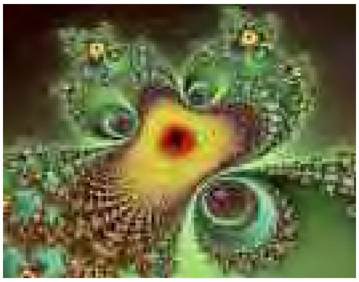
El conjunto de Mandelbrot está formado por los valores del parámetro c que cumplen cierta propiedad que estudiamos a continuación. Partimos del número complejo 0, lo elevamos al cuadrado y le sumamos c, obteniendo $0^2 + c = c$. Repetimos el proceso con este valor, obteniendo $c^2 + c$. Al iterar este proceso de feedback, se obtiene una sucesión cuyos primeros términos son

$$0,\quad c,\quad c^2 + c,\quad (c + c)^2 + c,\quad ((c^2 + c)^2 + c)^2 + c,\quad (((c^2 + c)^2 + c)^2 + c,\ldots$$

Existen entonces dos posibilidades: los términos de la sucesión permanecen todos en un círculo, o se alejan hacia infinito. En el primer caso, el número está en el conjunto de Mandelbrot. El algoritmo que acabamos de describir puede programarse para obtener imágenes del conjunto de Mandelbrot. Existen además algoritmos para colorear esas imágenes, basados en los valores de la sucesión de iteraciones, que producen imágenes impactantes, como las que siguen a estas líneas.



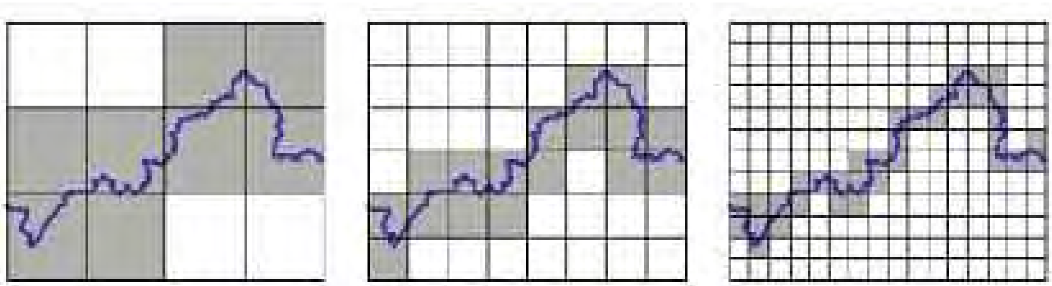




Dimensión fractal

¿Qué es lo que hace que una cierta imagen sea un fractal? Hasta ahora hemos mencionado la autosemejanza, pero no es suficiente. Un cuadrado es autosemejante, pues es la unión de cuatro cuadrados iguales entra sí y semejantes al primero, pero dista mucho de ser un fractal. El ingrediente que falta es la *dimensión fractal*. Todos tenemos una idea intuitiva de dimensión, que coincide con a llamada *dimensión topológica*: un punto no tiene dimensión, una línea tiene una, una superficie dos y un sólido tres. Pero los matemáticos han ideado otros conceptos de dimensión, que resultan más adecuados para el estudio de los fractales.

Para calcular la dimensión fractal de una figura plana se preparan una serie de cuadrículas cada vez más finas, de manera que el lado de una cuadrícula sea la mitad del de la anterior. Se superponen sobre el conjunto y se cuenta el número de cuadros que tienen algún punto en común con la figura. La forma en que varía ese número con el tamaño de la cuadrícula determina mediante una fórmula la dimensión fractal de la figura. De esta forma se puede determinar experimentalmente la dimensión fractal de una nube, un línea de costa o un cuadro, tal y como se ha hecho con las *drip paintings* del pintor americano Jackson Pollock (1912–1956).



La curva de Koch tiene dimensión fractal 1,262, y el triángulo de Sierpinski 1,585.

¿Qué es un fractal?

Estamos ya en condiciones de responder a esa pregunta. Según Mandelbrot , una figura es un fractal cuando su dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica.

Caos y fractales

En lenguaje coloquial, entendemos por caos una situación confusa, con un desarrollo errático y desordenado. Ese comportamiento caótico lo asociamos con fenómenos aleatorios, en los que es imposible predecir el resultado de un experimento concreto, como el de lanzar una moneda al aire. La teoría de la probabilidad, desarrollada a partir de los estudios sobre los juegos de azar por Pierre de Fermat (1601–1665) y Blaise Pascal (1623–1662), permite estudiar esos fenómenos de manera científica, y obtener información útil sobre ellos. Por ejemplo, explica porqué a la larga no puede ganarse dinero jugando en un casino.

Para explicar el fenómeno del *caos determinista*, realicemos un pequeño experimento con una calculadora. Introducimos un número positivo *cualquiera* y pulsamos repetidamente la tecla . El resultado final, independientemente del número inicial, será 1,000… Algo similar ocurre si pulsamos la tecla correspondiente a la función . Imaginemos (o programemos) una tecla que realice con un número x la operación $4x(1–x)$, y repitamos el experimento, esta vez con números comprendidos entre 0 y 1. Nos daremos cuenta enseguida de que el comportamiento de la serie numérica que vamos calculando a medida que presionamos esa tecla parece caótico. Además, si realizamos el experimento con dos números iniciales distintos pero muy cercanos, después de presionar unas cuantas veces la tecla, el resultado será muy distinto, como se aprecia en el siguiente cuadro. La primera fila es el número de veces que presionamos la tecla, la segunda el resultado que se obtiene al empezar con x=0,300, y la segunda al empezar con x=0,301.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
0,300	0,840	0,538	0,994	0,023	0,088	0,321	0,872	0,448	0,989	0,434	0,166
0,301	0.842	0,533	0,996	0,018	0,069	0,258	0,765	0,719	0,808	0,620	0,942

Este fenómeno es lo que se denomina dependencia sensitiva de condiciones iniciales, y es más conocido como *efecto mariposa*. Una pequeña diferencia en las condiciones iniciales, como puede ser el aleteo de una mariposa, puede producir a la larga resultados completamente diferentes. Cuando un sistema tiene este comportamiento, es inútil hacer predicciones a largo plazo, como bien saben los metereólogos.

Muchos de estos sistemas caóticos tienen *atractores extraños*, figuras hacia las cuales evolucionan con el transcurso del tiempo. A su vez, estos atractores son frecuentemente fractales.

Arte fractal

El impacto visual de las imágenes creadas a partir de los experimentos de Mandelbrot inspiró a una serie de artistas, que propusieron usar los algoritmos generativos de fractales para la creación de obras de arte. Una de las características que diferencian el arte fractal de otras formas de arte digital, es que son las matemáticas las que, a partir de parámetros elegidos por el artista, crean la obra. Por *arte fractal* se entiende la creación de obras de arte mediante algoritmos matemáticos de generación de fractales, y su posible manipulación posterior. La mayor parte de la producción de arte fractal es visual, imágenes para ser vistas en la pantalla del ordenador, y en ocasiones impresas para su comercialización, como si de litografías se tratase. Pueden verse en un museo para el que no es necesario entrada, sino que basta una conexión a Internet. Quien desse visitarlos puede hacerlo escribiendo en su buscador favorito «arte fractal». Los fractales se han mostrado también al público. La exposición *Arte Fractal: Belleza y Matemáticas*[1] pudo admirarse por ejemplo en Madrid durante el Congreso Internacional de Matemáticos Madrid 2006.

Los algoritmos fractales se usan también para la composición musical, cotinuando la estrecha relación entre música y matemáticas, que que va de los aspectos más técnicos de escalas, afinado y armonía a los más creativos de la composición. *Música fractal* es la música derivada de una sucesión de números producida por un algoritmo fractal. La idea de utilizar secuencias de números o letras para componer música no es nueva. Ya en el barroco era habitual componer a partir de las letras del nombre del propio compositor o alguno de sus mecenas. En la música fractal,

La música tiene una cierta estructura autosemejante. Muchas composiciones se basan en una melodía que se repite, variando aspectos como el tono, la duración de sus notas, o invirtiendo el orden en que son tocadas. El siguiente algoritmo produce música con una estructura autosemejante similar a la de un fractal. Se escriben los números naturales en base 2:

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, …

Se cuenta el número de unos que tienen en su forma binaria:

1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 4, 1, …

Se asigna a cada uno de esos números una nota:

Do, **Do**, Re, **Do**, Re, **Re**, Mi, **Do**, Re, **Re**, Mi, **Re**, Mi, **Mi**, Fa, **Do**, …

¿Dónde está la autosemejanza? Si eliminamos una de cada dos notas, quedándonos con las que están en negrita, se obtiene la misma melodía. Aplicado a distintas sucesiones, el algoritmo produce distintas melodías.

REFERENCIAS

Internet, una red con estructura fractal, es un excelente repositorio de información e imágenes fractales. cuyo único problema es el exceso de información. Para quienes hayan leído hasta aquí y deseen aprender más sobre el fascinante mundo de los fractales a la antigua usanza, es decir, con un libro, se incluye una breve bibliografía.

1. Barnsley, M., *Fractals Everywhere*, Academic Press, San Diego, 1988.
2. Hirst, B., *Fractal Landscapes from the Real World*, Cornerhouse Publications, Manchester, 1988.
3. Mandelbrot, M., *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1982.
4. Peitgen, H.-O. y Ritcher, P.H., D, *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.

[1] www.divulgamat.net/weborriak/Exposiciones/ArteMate/FractalesICM/index.asp

¿Y para *n*?

ALGUNAS PROPUESTAS PARA GUIAR A NUESTROS ALUMNOS A HACER CONJETURAS

María Moreno Warleta
IES Alameda de Osuna

EN este artículo se presentan algunas ideas y problemas que pueden ayudar a nuestros alumnos a hacer conjeturas y a entender qué son y por qué se deben hacer demostraciones.

¿POR QUÉ ENSEÑAR A CONJETURAR?

1º) Enseñando a conjeturar mostramos mejor la esencia del quehacer matemático.

2º) Enseñamos a nuestros alumnos un tipo de razonamiento que le será útil en contextos no matemáticos.

3º) Detectamos errores conceptuales, motivamos la introducción de conceptos nuevos y afianzamos el aprendizaje de los ya enseñados.

4º) Los alumnos lo toman como un reto. Se sale un poco de los programas habituales.

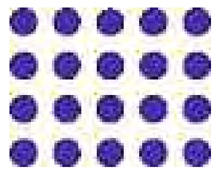
Lo dicen los grandes maestros de la didáctica de las matemáticas: Ya Polya en los años 60 incluía en su decálogo del profesor de matemáticas un punto que rezaba así: *Enséñales a conjeturar*. Y Puig Adam también ahondaba en esta idea: *Enseña guiando la actividad creadora y descubridora del alumno*.

La forma más sencilla de conjeturar es buscar pautas y generalizar. Este tipo de ejercicio puede hacerse en varios contextos. Veamos algunos de ellos:

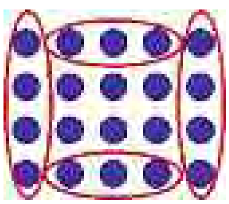
BUSCANDO PAUTAS EN CONSTRUCCIONES:

PROBLEMA 1: *En un rectángulo como este, de* 4 x 5*, hay* 14 *puntos en la frontera.*

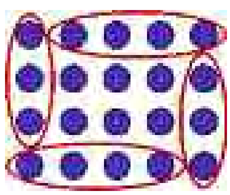
¿Cuántos puntos habrá en la frontera de un rectángulo de n x *m?*



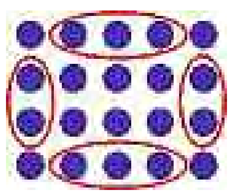
Si planteamos este problema a alumnos de la ESO, seguro que en el aula surgen algunas de estas fórmulas con sus respectivas justificaciones:



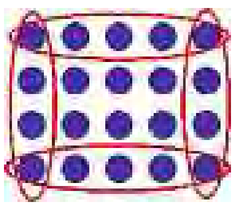
$2n+2(m-2)$



$2(n-1)+2(m-1)$



$2(n-2)+2(m-2)+4$



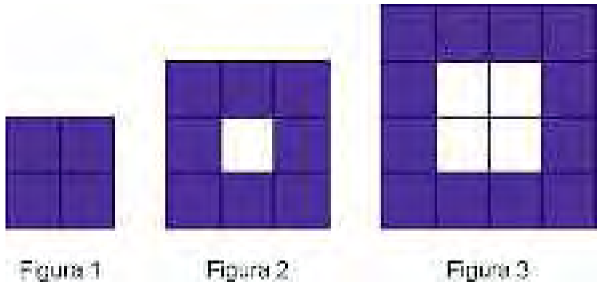
$2n+2m-4$

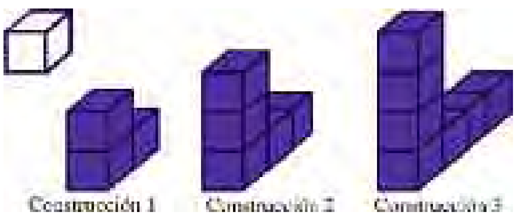
$n \cdot m - (n-2) \cdot (m-2)$

Un ejercicio interesante para los alumnos del primer ciclo es comprobar que todas las expresiones son iguales.

Algunos problemas similares al anterior son los siguientes:

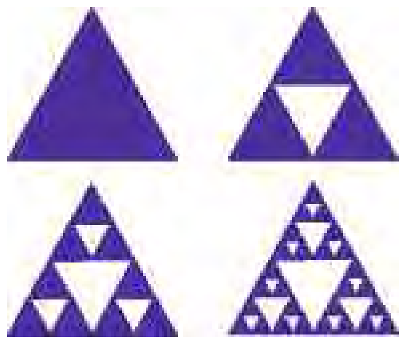
Problema 2: *¿Cuántos cuadrados azules y cuántos blancos necesitaré para hacer la figura número* 500*?* [2]





Problema 3: *Con cubos blancos hacemos construcciones en forma de* **L** *y una vez armadas las pintamos de azul. En la construcción* 500*, ¿cuántas caras pintaré?* [2]

Problema 4: Los triángulos de Sierpinski

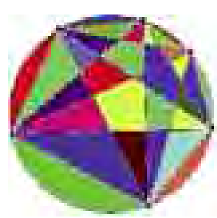


- *¿Cómo se forma la siguiente figura?*
- *Si el área de la parte coloreada en el primer triángulo es* 1 u^2*. ¿Cuál es el área de la parte coloreada en el cuarto triángulo? ¿Y en el decimoprimero?*
- *¿Y el área de la parte blanca?*
- *Si el lado del triángulo grande mide* 1 *u, ¿cuál será el perímetro de la zona azul en la enésima figura?*
- *¿Cuántos triángulos de cada color habrá en la figura* 1200*?*

Los problemas 2 y 3 son una buena forma de trabajar, de forma intuitiva, razonamientos de tipo inductivo y por recurrencia.

En el problema 4 planteo algunas preguntas que les han surgido a alumnos de la ESO. Este problema es especialmente interesente para alumnos de 3º ESO ya que permite deducir la fórmula de la suma de los *n* primeros términos de una progresión geométrica (comparando la suma de las áreas de los triángulos blancos con la diferencia entre el área total y el área azul) y, posteriormente, aplicarla para resolver las otras cuestiones.

Problema 5: La región perdida



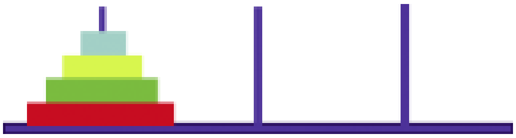
¿Cuántas regiones, como máximo, se forman dentro de un círculo si unimos dos a dos n puntos sobre su circunferencia? [10]

Este es un problema que provoca mucha sorpresa ya que, tras probar para los primeros valores de *n*, se conjetura con facilidad que el número de regiones será . Sin embargo, si se hace para *n* = 6, el número de regiones es sólo 31. Con este tipo de problemas mostramos a nuestros alumnos la necesidad de demostrar nuestras conjeturas.

Buscando pautas en juegos:

Dos juegos clásicos que permiten, además de buscar estrategias de resolución, conjeturar y dar argumentos inductivos, son:

Problema 6: Las torres de Hanoi (Puedes jugar online en [A])



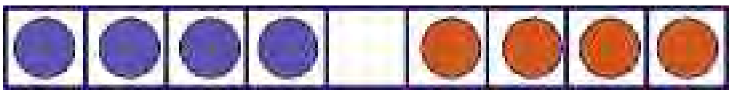
Objetivo: *llevar los discos de la varilla izquierda a la varilla derecha.*

Reglas del juego:

- *No se puede desplazar más de un disco en cada movimiento.*
- *Un disco sólo se puede apoyar sobre otro de diámetro mayor.*

¿Cuál es el mínimo número de movimientos para 4 *discos? ¿Y para* 64 *discos?*

Problema 7: Las ranas saltarinas (Puedes jugar online en [B])



Objetivo: *intercambiar la posición de las ranas.*

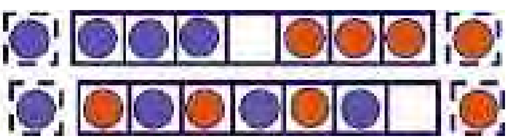
Reglas del juego:

- *Una rana puede saltar al cuadrado contiguo o saltar por encima de otra rana al cuadrado siguiente si está libre.*
- *No se puede saltar por encima de más de una rana.*
- *Las ranas sólo pueden avanzar, nunca retroceder.*

¿Cuántos movimientos son necesarios con 4 *ranas de cada color? ¿Y con* 100*?*

En el caso de las ranas saltarinas tras jugar varias veces con 2, 3, 4 y 5 ranas, es posible encontrar una pauta numérica en el número de movimientos. De ello surge una conjetura que se puede demostrar observando que al jugar con *n* ranas primero hay que jugar con *n*-1.

(1)
(2)



Tras 5 movimientos llevamos una azul a la derecha y llegamos a:

(3)

Tras 4 movimientos llevamos una roja a la izquierda y llegamos de nuevo a **(2)**:

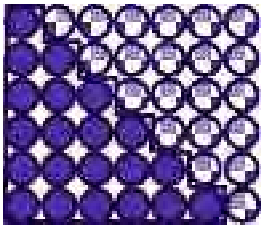
(4)

Buscando pautas numéricas:

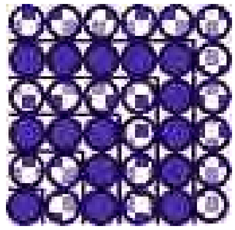
Algunos problemas numéricos requieren para su demostración de argumentos inductivos o de complicadas manipulaciones algebraicas. A continuación ofrecemos problemas cuyas demostraciones pueden ser comprendidas por alumnos de la ESO:

Problema 8: *Piensa un número de dos cifras. Réstale la suma de sus cifras, ¿qué observas?* (Puedes encontrar una aplicación sorprendente de este resultado en [C])

Los siguientes problemas permiten *Demostraciones sin palabras* [3].



Problema 9: *¿Cuánto suman los diez primeros números enteros? ¿Y los diez mil primeros números enteros?*



Problema 10: *¿Cuánto suman los veinte primeros enteros impares? ¿Y los cinco mil primeros números enteros impares?*

Problema 11:

Piensa un número de 4 cifras no todas iguales.

Reordena las cifras para obtener el mayor y el menor número posible.

Calcula la diferencia de entre estos dos números.

Repite el proceso unas cuantas veces con los números que vas obteniendo.

¿Qué observas?

Este curioso problema está demostrado en [4]. Su demostración requiere de algunas deducciones lógicas y, fundamentalmente, de un estudio sistemático y metódico de todos los casos que aparecen, lo que la hace especialmente adecuada para los alumnos de la ESO.

Tres conjeturas famosas:

Para aquellos que se hayan quedado con ganas, dejamos como «ejercicio» las siguientes conjeturas para que las demuestren o encuentren contraejemplos: [5]

***Conjetura de Goldbach* (1742)**: *Todo número par mayor que 2 se puede escribir como suma de dos números primos.*

El problema 3*x* + 1:

Comienza con un número natural cualquiera.

Si es par, divídelo entre 2.
Si es impar, multiplícalo por 3 y súmale 1.

Repite el proceso.

Conjetura: *Todo número natural produce una secuencia que finalmente acaba en 4, 2, 1.*

Ejemplo: 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

***Conjetura de los capicúas**:*

Piensa un número. Invierte sus cifras. Suma esos dos números. Repite la operación con el resultado obtenido.

Conjetura: *Tarde o temprano obtendrás un número capicúa.*

Ejemplos: 235 + 532 = 767

139 + 931= 1070; 1070 + 0701= 1771

BIBLIOGRAFÍA:

[1] Newton Students Notes
Mathematics Challenge for Young Australians
Enrichment Stage AMT Publishing http://www.amtt.com.au/

[3] Demostraciones sin palabras
Roger B. Nelsen
Ed. Proyecto Sur

[5] Excursions in Calculus
Robert M. Young
The Mathematical Association of America

[7] Damas, parábolas y más mistificaciones matemáticas
Martin Gardner
Gedisa Editorial

[9] Problemas con pautas y números
Shell Centre for Mathematical Education
Ed. Universidad del País Vasco

[2] Dirichlet Student Notes Mathematics Challenge for Young Australians
Enrichment Stage AMT Publishing
http://www.amtt.com.au/

[4] El ingenio en las matemáticas
Ross Honsberger
Col. La tortuga de Aquiles. Ed. Euler

[6] Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas
Martin Gardner
Gedisa Editorial

[8] Mathematical Circles (Russian Experience)
Fomin, Genkin e Itenberg
American Mathematical Society

[10] Pensar matemáticamente
Mason, Burton y Stancey
Editorial Labor

PÁGINAS WEB DE JUEGOS:

[A] Las torres de Hanoi
http://www.aulademate.com/contentid-99.html

[B] Las ranas saltarinas
http://www.albinoblacksheep.com/flash/frog

[C] Lectura del pensamiento
http://www.cyberpadres.com/juegos/jugar/pensamiento_lectura.htm

APOYO EN LA RED
UNA EXPERIENCIA DE AULA

Adoración Morales Antequera
Iosu Martínez Martínez
Colegio Nuestra Señora del Recuerdo

EL Colegio Nuestra Señora del Recuerdo pertenece a la Compañía de Jesús, y se encuentra ubicado en el distrito de Chamartín de Madrid. Es de carácter concertado, y en él puede cursarse desde el último año del primer ciclo de Educación Infantil hasta 2º de Bachillerato.

Cuando asignan en el colegio una clase de apoyo, de Matemáticas o Lengua, a partir de las cuatro de la tarde, empieza una cierta angustia. ¿Cómo hacerlo?

Las dificultades son mayores que en una clase normal: hay que buscar una metodología útil y motivadora para los alumnos; realizar una programación de contenidos conceptuales y procedimentales que faciliten el aprendizaje; buscar métodos y criterios de evaluación que permitan detectar las deficiencias y necesidades de los alumnos, así como los logros que se vayan consiguiendo en las clases de apoyo y establecer un diseño realista –adecuado a las circunstancias del Colegio– de los tiempos y lugares en los que atender a los alumnos con necesidades especiales en estas áreas del aprendizaje.

Ante estas dificultades, y con ayuda de la Fundación Pastrana, un grupo de profesores que daban y dan clases a alumnos con dificultades trabajaron durante dos años. Y dicho trabajo se concretó en una página Web.

Entre otras conclusiones se llegó a que no cualquier profesor puede dar apoyo, y sobre todo que el criterio no debe ser que a un profesor le falten horas para asignarle este tipo de grupos. Normalmente un grupo de alumnos de apoyo «desquicia», ya que tienes a chicos que no entienden la clase y el profesor tiene que «ingeniarse» otras metodologías para llegar a los alumnos. Además se repiten las cosas muchas veces.

Por ello clasificamos las **características del profesor de apoyo** según el curso:

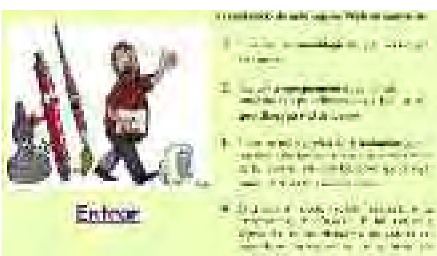
En Primaria debe ser el mismo que da clase en la sección puesto que conoce al alumno, o un experto en logopedia o psicopedagogía. Los mismos profesores de primaria podrían ser las personas más adecuadas para llevar a cabo el apoyo. Ellos saben mejor que nadie, por el día a día, cuáles son las dificultades y la manera de solucionarlas. Esto simplifica el trabajo y lo hace más efectivo. Un posible obstáculo que se encuentra en todas las etapas del apoyo es que los padres no acepten el fracaso.

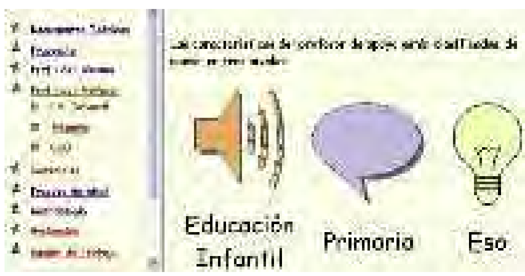
En ESO debe ser un profesor del área de Matemáticas o Lengua. El profesor de la asignatura no debería poner las notas de estos alumnos sin contar con el profesor de apoyo, ya que esto significaría, que el profesor de apoyo cuenta y tiene algo que decir. Que el profesor haga pruebas o ponga notas puntuales que ayuden al chico, ya que hay chicos que hacen un gran esfuerzo en dicha clase. Ha de ser un profesor dialogante, paciente y con autoestima.

Igualmente se hizo un **perfil del alumno** de apoyo, clasificado por cursos:

En Educación Infantil el alumno de apoyo es aquel alumno que está desorientado; que no es capaz ni por sí mismo ni con la aclaración del profesor, de seguir el ritmo de la clase.

El principal objetivo que se debería conseguir en la clase de apoyo es que los alumnos con dificultades adquirieran autoestima. Es decir, que el alumno asuma su ritmo de aprendizaje como algo natural, pero evitando ex-





presamente que vaya a acomodarse en una ley del mínimo esfuerzo. El segundo objetivo es que el alumno llegue a superar esa dificultad o situación, de modo que desarrolle la autonomía necesaria para dejar el apoyo, en el plazo de tiempo más breve posible.

En Educación Primaria los alumnos de apoyo presentan dificultades en el aprendizaje de la lectura, escritura o cálculo. Sus características son:

- Suelen ser alumnos inmaduros, con problemas de lateralidad y deficiencias en la organización espacial
- Alumnos que no pueden seguir el ritmo de la clase ya que su nivel está muy por debajo del nivel medio
- Suelen ser tímidos, inseguros y con una autoestima muy baja
- Presentan problemas en la percepción espacial

En ESO debe ser un alumno que no presente problemas de disciplina y aproveche las clases. El criterio inicial es el académico (malas notas en Matemáticas o Lengua), junto con la opinión del profesor y el consejo del servicio de orientación. Otro requisito es la aceptación por parte del alumno de asistir a la clase de apoyo. Son alumnos que presentan carencias conceptuales que impiden el aprendizaje. Suelen tener un nivel entre el «3 y 5», es decir que con una ayuda pueden superar las dificultades. No deberían ir alumnos que «se les de mal» una parte pequeña del temario en un determinado curso (en general no tienen problemas de aprendizaje).

Se crearon unos materiales para cada curso en las áreas de Matemáticas y Lengua, desde 3º de Infantil a 4º de ESO.

En primaria se clasificaron las fichas en Lectoescritura y Razonamiento Matemático.

El material desde 4º de Primaria a 4º de ESO está ordenado siguiendo la secuenciación de contenidos conceptuales.

Unas pruebas de nivel, una propuesta metodológica y unas técnicas de evaluación completan la página Web.

PROPUESTA METODOLÓGICA

Se parte de los conocimientos, intereses y capacidades del alumno, asentando los nuevos contenidos. Esto supone partir de sus conocimientos previos, hacer explicaciones a su altura y comenzar con ejercicios pensados para su nivel. Cuando los alumnos comprenden y resuelven sus dificultades, es decir, obtienen éxito en su aprendizaje, se produce un avance clave: ellos son los protagonistas de su aprendizaje.

Este planteamiento no supone rebajar los contenidos de forma indiscriminada sino partir de la realidad de ellos para llegar más lejos.

Tiene que existir un seguimiento individualizado del progreso del alumno por parte de ambos profesores (titular y de apoyo). El seguimiento individual es posible por el reducido número de alumnos que participan, máximo 5.

Se establecerán pautas de ayuda y actividades adecuadas para que progrese en los demás aspectos o supere sus dificultades. Se intentará desde el comienzo de curso que el alumno «nos vea de su parte».

Tenemos que hacernos conscientes de la importancia de crear un buen ambiente para potenciar los valores individuales desde el esfuerzo positivo por el trabajo bien hecho y por las actitudes personales destacables. Los alumnos tienen que adquirir compromisos individuales y ser capaces de analizarlos.

Durante los tres años que llevamos poniendo en práctica todo el contenido de esta página Web, los resultados obtenidos por parte de los alumnos de apoyo han sido satisfactorios. Así mismo la evaluación que del trabajo han hecho profesores, alumnos y padres de alumnos han siso muy positiva y nos anima a seguir trabajando en esta línea.