Cálculo del número π:
De Arquímedes a la actualidad

Curso: Historia de los Algoritmos

UPM, marzo de 2008

Roberto Rodríguez del Río

http://www.mat.ucm.es/~rrdelrio/

Departamento de Matemática Aplicada

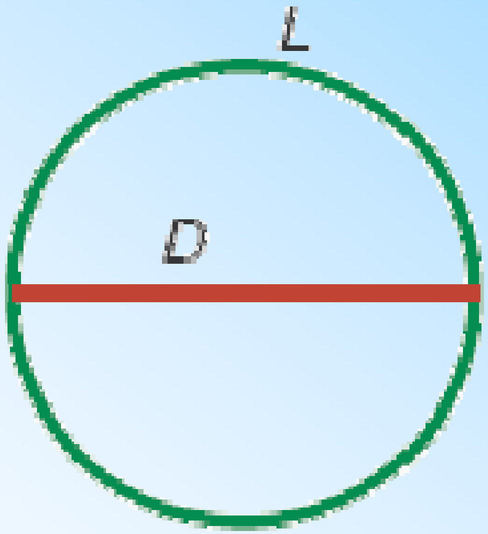
Universidad Complutense de Madrid

Grupo UCM de Investigación CADEDIF

Cálculo del número π

- Introducción
- Arquímedes
- Leibniz
- Euler
- Nuevos algoritmos
- Referencias
- Conclusión

Introducción



$$\frac{L}{D} = \pi$$

¿Cómo podemos calcular π ?

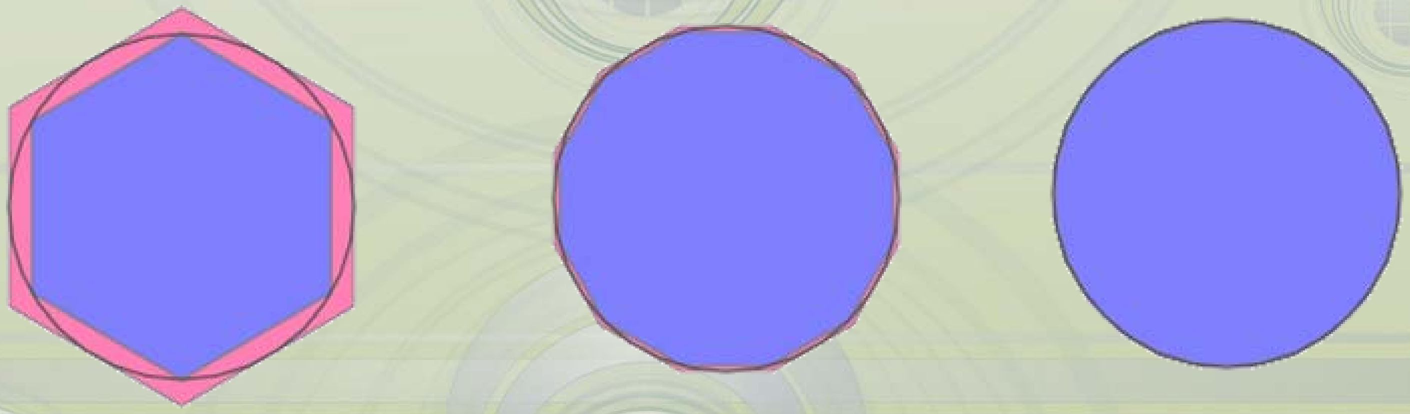
Arquímedes

Arquímedes de Siracusa

(287 – 212 a.C.)

Arquímedes

- En un circunferencia de radio 1. Su longitud es 2π.
- Aproximamos la longitud mediante polígonos inscritos y circunscritos



Arquímedes

a_n = Perímetro del n-ágono circunscrito

b_n = Perímetro del n-ágono inscrito

Entonces,

$b_n < 2\pi < a_n$, además, $2\pi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$

Por ejemplo, si n=6 , $a_6 = 4\sqrt{3}$; $b_6 = 6$

Mediante trigonometría:

$$a_{2n} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad ; \quad b_{2n} = \sqrt{a_{2n} b_n}$$

Arquímedes llegó a:

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

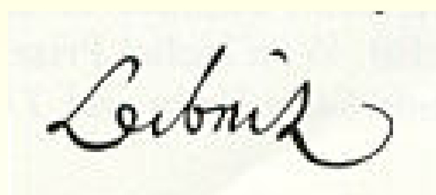
$$3,1408 < \pi < 3,1428$$

Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz

(1646-1716)

"Dios ama los números impares"



Leibniz

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \quad ; \quad \text{si } |\text{x}| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

Integrando,

$$\text{arctg(x)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

Leibniz

- Hacemos $x = 1, \ \mathrm{arctg}(1) = \dfrac{\pi}{4}$
- $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$
- Para obtener 50 decimales exactos de π es necesario sumar 10^{50} términos.
- "…labor fere in aeternum…", (Euler, 1737)
- Para ver la forma en que Leibniz dedujo realmente su serie, ver G.F. Simmons, *Cálculo y Geometría Analítica,* segunda edición, McGraw-Hill, pp.396.

Euler

“Leed a Euler. Él es el maestro de todos nosotros”

Laplace

Leonhard Euler

(1707-1783)

Euler

- (Jacob Bernoulli, 1654-1705) Problema: calcular la suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

- Según el Álgebra: Si el polinomio

$$p(x) = b_0 - b_1 x^2 + b_2 x^4 - b_3 x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n}$$

tiene $2n$ raíces diferentes $\pm\beta_1, \pm\beta_2, \ldots, \pm\beta_n$, entonces

$$p(x) = b_0 \left(1 - \frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x^2}{\beta_n^2}\right)$$

Euler

- Desarrollamos $\operatorname{sen}(x)$ en serie de Taylor

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

"Polinomio de grado infinito" con raíces 0, $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$

- Entonces, (si $x \neq 0$)

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots$$

Euler

- Por fin, hacemos $x^2 = -\pi^2 z$ e identificamos coeficientes.

- Se obtienen las “fórmulas de Euler”

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots$$

etc.

Euler

"El paso decisivo de Euler fue temerario. Euler utilizó una regla en un caso donde no había sido establecida; utilizó para ecuaciones no algebraicas una regla de las ecuaciones algebraicas. Desde el punto de vista de la lógica rigurosa, este paso de Euler no estaba justificado."

George Polya (1887-1985)

Nuevos Algoritmos:

Algoritmo de Brent-Salamin

Desarrollado en 1976. E. Salamin; R. Brent, independientemente.

Tomamos: $a_0 = 1 \;\; ; \;\; b_0 = 1/\sqrt{2} \;\; ; \;\; s_0 = 1/2$

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}$$

$$s_n = s_{n-1} - 2^n \left(a_n^2 - b_n^2 \right)$$

$$p_n = \frac{2a_n^2}{s_n}$$

Nuevos algoritmos:
Algoritmo de Brent-Salamin

p_n converge cuadráticamente a π

(Es decir, cada iteración duplica el número de dígitos correctos)

Con 25 iteraciones se puede obtener π con 45 millones de cifras decimales exactas.

Basado en ideas de Arquímedes y Gauss

Nuevos Algoritmos:

Algoritmo de Borwein
(Peter y Jonathan Borwein)

(D. Bailey, P. Borwein, S. Plouffe, *On the rapid computation of various polylogarithmic constants*, 1997)

Teorema (Fórmula BBP)

$$\pi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i} \left(\frac{4}{8i+1} - \frac{2}{8i+4} - \frac{1}{8i+5} - \frac{1}{8i+6} \right)$$

Demostración:

Para k < 8 ;

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{\infty} x^{k-1+8i}\,dx$$

$$= \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+k)}$$

Por tanto,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i(8i+k)} = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2^{k/2}\,x^{k-1}}{1-x^8}\,dx$$

Nuevos algoritmos:
Algoritmo de Borwein

Sumando los casos *k=1*, *k=4*, *k=5* y *k=6*, obtenemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{16^i}\left(\frac{4}{8i+1}-\frac{2}{8i+4}-\frac{1}{8i+5}-\frac{1}{8i+6}\right)=$$

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}dx$$

Y, usando DERIVE,

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2}-8x^3-4\sqrt{2}x^4-8x^5}{1-x^8}dx = \pi$$

<u>Eficacia</u>:

Con un sumando, se obtiene 3,1333… (DERIVE)

Con dos sumandos, 3,141422466…

Con tres sumandos, 3,141592653…

¡Convergencia cuártica!

A partir de la fórmula BBP se han desarrollado muchos algoritmos.

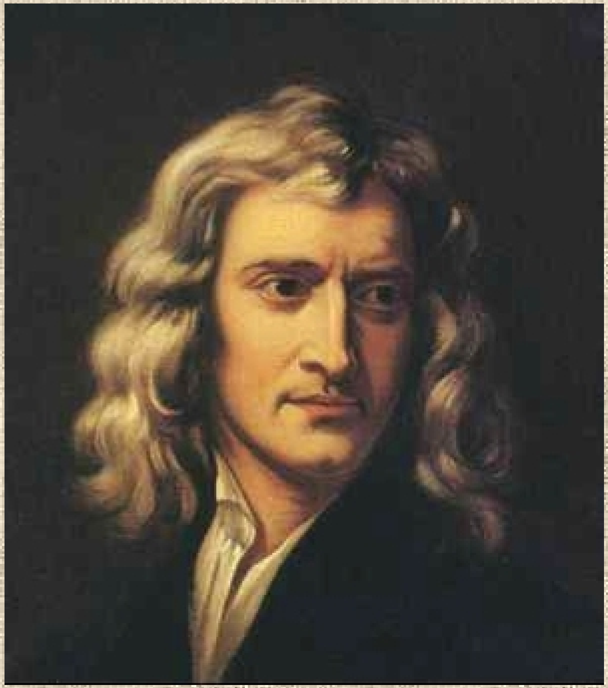
Algunos libros

- L. Berggren, J. Borwein, P. Borwein. *Pi: A Source Book*, Tercera Edición, Springer, 2004.
- P. Eymard, J.P. Lafon. *The number* π , AMS, 2004.
- E. Hairer, G. Wanner. *Analysis by Its History*, Springer, 2000.
- A.V. Zhúkov. *El omnipresente número* π , Editorial URSS, 2005.

"La naturaleza se reduce a un número: π.

Quien descubra el misterio de π, comprenderá el pensamiento de Dios…"

Isaac Newton



Presentación realizada por

Natalia Cavero