

Explicando la irracionalidad

Roberto Rodríguez del Río

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
<http://www.mat.ucm.es/~rrdelrio/>

Enseñar matemáticas en la actualidad: ideas y recursos
Universidad de Otoño-CDL, 2013
Septiembre de 2013

Decimales

Naturales, enteros, racionales...

Las fracciones y su expresión decimal. Ejemplos:

$$\frac{1}{2} = 0,5$$

$$\frac{1}{3} = 0,3333... \quad \frac{1}{9} = 0,1111...$$

$$\frac{1}{6} = 0,16666...$$

Para pensar e investigar

Más ejemplos:

$$\frac{1}{109} = 0,0091743119... ?$$

$$\frac{1}{109} = 0,0091743119266055045871559633027522935779$$
$$816513761467889908256880733944954128440366$$
$$972477064220183486238532110091...$$

(Período de 108 dígitos)

$$1 \stackrel{?}{=} 0,99999....$$

Para pensar e investigar

¿Cómo deben ser las fracciones para que el decimal sea exacto, periódico puro o periódico mixto?

¿Qué hace que $\frac{3}{5}$ sea exacto, $\frac{2}{7}$ sea periódico puro, $\frac{3}{14}$ sea periódico mixto?

Ciclos

$$\frac{1}{7} = 0,1428571428571428\dots$$

$$\frac{2}{7} = 0,2857142857142857\dots$$

$$\frac{3}{7} = 0,4285714285714285\dots$$

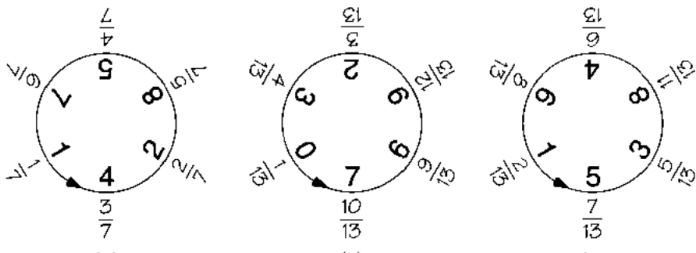
$$\frac{4}{7} = 0,5714285714285714\dots$$

$$\frac{5}{7} = 0,7142857142857142\dots$$

$$\frac{6}{7} = 0,8571428571428571\dots$$

Ciclos

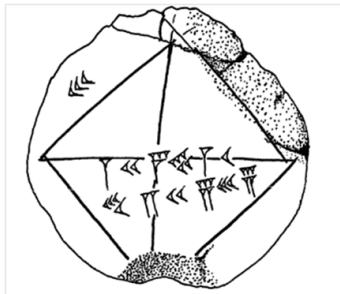
Sin embargo, si el denominador es 13, aparecen dos ciclos diferentes:



Raíces cuadradas e irracionales

$$\sqrt{2}$$

En primer lugar, vamos a calcular. Algoritmo babilonio.



Algoritmo babilonio

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1,5$$

$$x_2 = 1,416\dots$$

$$x_3 = 1,414215\dots$$

$$x_4 = \mathbf{1,4142135623746\dots}$$

Raíces cuadradas e irracionales

Teorema

$\sqrt{2}$ es un número irracional.

Una demostración geométrica

Referencias

- JOHN H. CONWAY, RICHARD K. GUY. *The Book of Numbers*. Springer, New York, 1996.
- ALFRED S. POSAMENTIER. *Math Wonders to Inspire Teachers and Students*. Association for Supervision and Curriculum Development Alexandria, Virginia USA, 2003.