

Armonía, belleza y matemáticas: el número áureo

Roberto Rodríguez del Río

IES Valmayor

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
<http://www.mat.ucm.es/~rrdelrio/>

UNIVERSIDAD DE OTOÑO, CDL
24 de septiembre de 2009

Un concierto



Anne-Sophie Mutter, violinista

Un concierto



Sofia Gubaidulina, compositora

Un concierto

Concierto extraordinario de la Orquesta Nacional,
Auditorio Nacional, Madrid, 18 de enero de 2009.

Un concierto

Concierto extraordinario de la Orquesta Nacional,
Auditorio Nacional, Madrid, 18 de enero de 2009.

Primera obra: *Stimmen... verstummen* (1986)

Un concierto

Concierto extraordinario de la Orquesta Nacional,
Auditorio Nacional, Madrid, 18 de enero de 2009.

Primera obra: *Stimmen... verstummen* (1986)

Un concierto

Notas al programa:

Un concierto

Notas al programa:

... Un análisis más minucioso demuestra que el movimiento de la tríada, y no sólo los pasajes sonoros sino también las pausas, está basado en las proporciones de la sección áurea o en las cifras de la denominada sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., en la que el número siguiente resulta de la suma de los dos anteriores, y en la que, cuanto mayor es el número, más perfecta es la sección áurea que se construye.

Un concierto

Notas al programa:

... Un análisis más minucioso demuestra que el movimiento de la tríada, y no sólo los pasajes sonoros sino también las pausas, está basado en las proporciones de la sección áurea o en las cifras de la denominada sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., en la que el número siguiente resulta de la suma de los dos anteriores, y en la que, cuanto mayor es el número, más perfecta es la sección áurea que se construye.

.....

La compositora denomina "consonantes" a estas proporciones rítmicas y formales.

Un concierto

Notas al programa:

... Un análisis más minucioso demuestra que el movimiento de la tríada, y no sólo los pasajes sonoros sino también las pausas, está basado en las proporciones de la sección áurea o en las cifras de la denominada sucesión de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., en la que el número siguiente resulta de la suma de los dos anteriores, y en la que, cuanto mayor es el número, más perfecta es la sección áurea que se construye.

.....

La compositora denomina “consonantes” a estas proporciones rítmicas y formales.

Sonatas para piano de Mozart



Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791)

Sonatas para piano de Mozart

¿Utilizó Mozart la razón áurea en la composición de sus sonatas para piano?

Sonatas para piano de Mozart

¿Utilizó Mozart la razón áurea en la composición de sus sonatas para piano?

The Golden Section and the Piano Sonatas of Mozart,
John F. Putz (1995)

Sonatas para piano de Mozart

¿Utilizó Mozart la razón áurea en la composición de sus sonatas para piano?

The Golden Section and the Piano Sonatas of Mozart,
John F. Putz (1995)

“No hay evidencias de que Mozart usase la razón áurea en la composición de sus sonatas de piano. Quizá conocía el concepto, o quizá no lo conocía y su genio lo intuyó. Pero no deja de ser una idea romántica.”

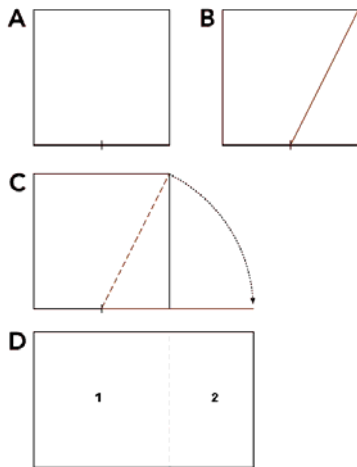
Sonatas para piano de Mozart

¿Utilizó Mozart la razón áurea en la composición de sus sonatas para piano?

The Golden Section and the Piano Sonatas of Mozart,
John F. Putz (1995)

“No hay evidencias de que Mozart usase la razón áurea en la composición de sus sonatas de piano. Quizá conocía el concepto, o quizá no lo conocía y su genio lo intuyó. Pero no deja de ser una idea romántica.”

Euclides



Obtención de Φ

Euclides

Se obtiene

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033989\dots$$

Euclides

Se obtiene

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033989\dots$$

Euclides



Número áureo

Euclides

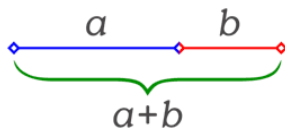
Euclides probó que Φ es irracional

Euclides

Euclides probó que Φ es irracional

Se dice que dos números a y b están en *razón áurea* si

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$$

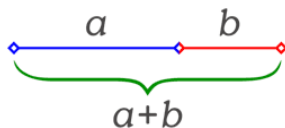


Euclides

Euclides probó que Φ es irracional

Se dice que dos números a y b están en *razón áurea* si

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi$$



Kepler

“La geometría cuenta con dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea en la razón media y extrema. El primero es para nosotros oro puro; el segundo, una piedra preciosa.”

Johannes Kepler.

Existen muchas construcciones geométricas en las que aparece el número áureo.

Kepler

“La geometría cuenta con dos grandes tesoros: uno es el teorema de Pitágoras; el otro, la división de una línea en la razón media y extrema. El primero es para nosotros oro puro; el segundo, una piedra preciosa.”

Johannes Kepler.

Existen muchas construcciones geométricas en las que aparece el número áureo.

Φ ibonacci



Leonardo da Pisa, Fibonacci (1170-1250)



Liber Abbaci, Biblioteca Nacional de Florencia

Fibonacci

$$\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$$

Fibonacci

$$\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$$

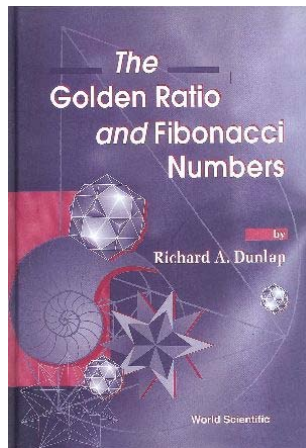
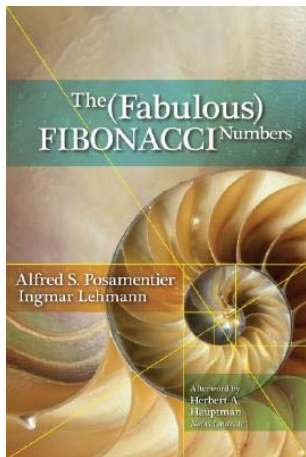
$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \longrightarrow \Phi$$

Fibonacci

$$\{F_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$$

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \longrightarrow \Phi$$

Fibonacci



Φ ¿canon de belleza?

La belleza es una propiedad de las cosas que hace amarlas, infundiendo en nosotros deleite espiritual.

Diccionario de la RAE

Φ ¿canon de belleza?

La belleza es una propiedad de las cosas que hace amarlas, infundiendo en nosotros deleite espiritual.

Diccionario de la RAE

La belleza de cualquier clase, en su manifestación suprema, excita invariablemente el alma sensitiva hasta hacerle derramar lágrimas.

Edgar Allan Poe

Φ ¿canon de belleza?

La belleza es una propiedad de las cosas que hace amarlas, infundiendo en nosotros deleite espiritual.

Diccionario de la RAE

La belleza de cualquier clase, en su manifestación suprema, excita invariablemente el alma sensitiva hasta hacerle derramar lágrimas.

Edgar Allan Poe

Mira dos veces para ver lo justo, mira una vez para ver lo bello.

Henry Amiel

Φ ¿canon de belleza?

La belleza es una propiedad de las cosas que hace amarlas, infundiendo en nosotros deleite espiritual.

Diccionario de la RAE

La belleza de cualquier clase, en su manifestación suprema, excita invariablemente el alma sensitiva hasta hacerle derramar lágrimas.

Edgar Allan Poe

Mira dos veces para ver lo justo, mira una vez para ver lo bello.

Henry Amiel

Belleza y geometría

Por la belleza de las figuras no entiendo lo que muchos se imaginan, por ejemplo, cuerpos hermosos, bellas pinturas; sino que entiendo por aquella lo que es recto y circular, y las obras de este género, planas y sólidas, trabajadas a torno, así como las hechas con regla y con escuadra. Porque sostengo, que estas figuras no son como las otras, bellas por comparación, sino que son siempre bellas en sí por su naturaleza; y que procuran ciertos placeres que le son propios, y no tienen nada de común con los placeres producidos por los estímulos carnales.

Platón, Filebo, diálogos

Belleza y geometría

Por la belleza de las figuras no entiendo lo que muchos se imaginan, por ejemplo, cuerpos hermosos, bellas pinturas; sino que entiendo por aquella lo que es recto y circular, y las obras de este género, planas y sólidas, trabajadas a torno, así como las hechas con regla y con escuadra. Porque sostengo, que estas figuras no son como las otras, bellas por comparación, sino que son siempre bellas en sí por su naturaleza; y que procuran ciertos placeres que le son propios, y no tienen nada de común con los placeres producidos por los estímulos carnales.

Platón, Filebo, diálogos

Belleza y matemáticas

Las formas más elevadas de lo bello son el orden, la simetría, lo definido, y eso es sobre todo lo que hacen aparecer las matemáticas.

Aristóteles, La Metafísica

Belleza y matemáticas

Las formas más elevadas de lo bello son el orden, la simetría, lo definido, y eso es sobre todo lo que hacen aparecer las matemáticas.

Aristóteles, La Metafísica

Belleza, arte, ciencia

La cosa más bella que podemos experimentar es lo misterioso. Es la emoción fundamental que hallamos en la cuna del auténtico arte y ciencia. Aquel que ya lo conoce y ya no puede hacerse preguntas, quien ya no tiene asombro, está muerto, no es más que una vela apagada.

Albert Einstein

Belleza, arte, ciencia

La cosa más bella que podemos experimentar es lo misterioso. Es la emoción fundamental que hallamos en la cuna del auténtico arte y ciencia. Aquel que ya lo conoce y ya no puede hacerse preguntas, quien ya no tiene asombro, está muerto, no es más que una vela apagada.

Albert Einstein

Belleza y rectángulo áureo

El número áureo, el rectángulo áureo, ¿confieren belleza?

Belleza y rectángulo áureo

El número áureo, el rectángulo áureo, ¿confieren belleza?

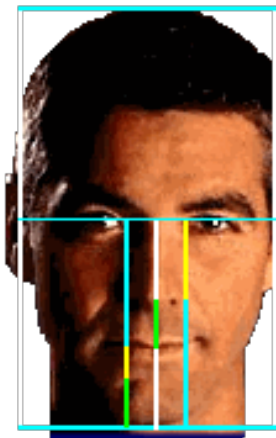
¿Es más bella la imagen que se ajusta a un rectángulo áureo que la que no lo hace?

Belleza y rectángulo áureo

El número áureo, el rectángulo áureo, ¿confieren belleza?

¿Es más bella la imagen que se ajusta a un rectángulo áureo que la que no lo hace?

Belleza y rectángulo áureo



La Gioconda



The Golden Section, Hans Walser,
The Mathematical Association of America

La Gioconda



La Gioconda, Leonardo da Vinci (1471-1528)

La Gioconda

¿Son los ojos? ¿La luz? ¿La sonrisa? ¿Qué convierte a la Mona Lisa en uno de los retratos más importantes de la historia, tan emotivo, incluso durante su creación, que el joven Rafael se sentaba en las rodillas de Leonardo para verle pintar?

La Gioconda

¿Son los ojos? ¿La luz? ¿La sonrisa? ¿Qué convierte a la Mona Lisa en uno de los retratos más importantes de la historia, tan emotivo, incluso durante su creación, que el joven Rafael se sentaba en las rodillas de Leonardo para verle pintar?

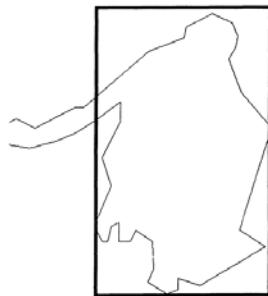
Guy Gugliotta, periodista científico

La Gioconda

¿Son los ojos? ¿La luz? ¿La sonrisa? ¿Qué convierte a la Mona Lisa en uno de los retratos más importantes de la historia, tan emotivo, incluso durante su creación, que el joven Rafael se sentaba en las rodillas de Leonardo para verle pintar?

Guy Gugliotta, periodista científico

San Gerolamo



San Jerónimo, Leonardo da Vinci, 1480

De divina proportione

¿Conocía Leonardo da Vinci la sección áurea?

De divina proportione

¿Conocía Leonardo da Vinci la sección áurea?

Sí. Sin duda.

De divina proportione

¿Conocía Leonardo da Vinci la sección áurea?

Sí. Sin duda.

Leonardo ilustró la obra *De divina proportione* (1509) de Luca Paccioli (1445-1417).

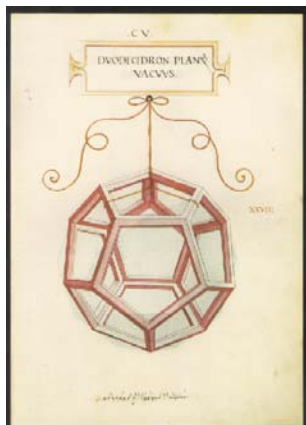
De divina proportione

¿Conocía Leonardo da Vinci la sección áurea?

Sí. Sin duda.

Leonardo ilustró la obra *De divina proportione* (1509) de Luca Paccioli (1445-1417).

Leonardo da Vinci



Ilustraciones de Leonardo para *De divina proportione*,
Venecia, 1509

¿Pirámides, Partenón, Naciones Unidas, ...?

¿Pirámides, Partenón, Naciones Unidas, ...?

The Golden Ratio: A Contrary Viewpoint,
Clement Falbo, The College Mathematics Journal, (2005)

¿Pirámides, Partenón, Naciones Unidas, ...?

The Golden Ratio: A Contrary Viewpoint,
Clement Falbo, The College Mathematics Journal, (2005)

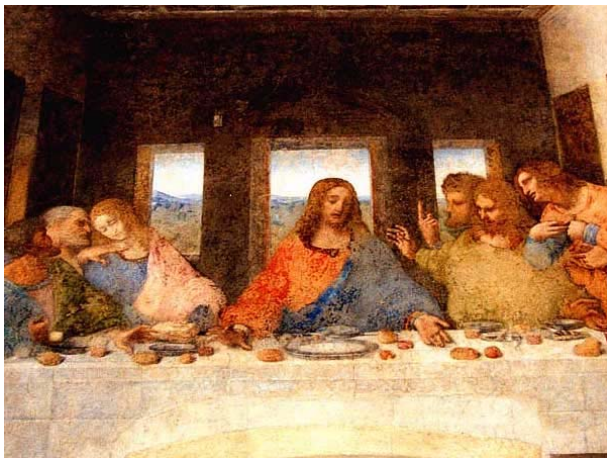
Misconceptions about the Golden Ratio,
George Markowsky, The College Mathematics Journal, (1992)

¿Pirámides, Partenón, Naciones Unidas, ...?

The Golden Ratio: A Contrary Viewpoint,
Clement Falbo, The College Mathematics Journal, (2005)

Misconceptions about the Golden Ratio,
George Markowsky, The College Mathematics Journal, (1992)

Leonardo da Vinci



Última cena, Leonardo da Vinci (1471-1528)

Durero



Melancolía, Alberto Durero (1471-1528)

Piero della Francesca



Piero della Francesca (1416-1492)

Johann Sebastian Bach



Clave bien temperado, Johann Sebastian Bach, (1685-1750)

El arte es mucho más que la técnica. La técnica se puede enseñar, es esencialmente racional. Se puede explicar racionalmente el manejo de una máquina —¡cuidado, digo el manejo, no el invento!—, pero no se puede explicar a otro cómo usar la gubia para conseguir unas determinadas curvas en la madera. Se podrá explicar cómo trazar la curva, pero nunca será igual a la conseguida por un artista. El conseguir una obra de arte requiere algo distinto, algo que, para mí, constituye el secreto de la vida, lo no transmisible de la vida.

Escribir es vivir, José Luis Sampedro.

El arte es mucho más que la técnica. La técnica se puede enseñar, es esencialmente racional. Se puede explicar racionalmente el manejo de una máquina —¡cuidado, digo el manejo, no el invento!—, pero no se puede explicar a otro cómo usar la gubia para conseguir unas determinadas curvas en la madera. Se podrá explicar cómo trazar la curva, pero nunca será igual a la conseguida por un artista. El conseguir una obra de arte requiere algo distinto, algo que, para mí, constituye el secreto de la vida, lo no transmisible de la vida.

Escribir es vivir, José Luis Sampedro.