El número e

Algunas ideas para la Secundaria y el Bachillerato

Roberto Rodríguez del Río

IES Valmayor, Valdemorillo

———

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
http://www.mat.ucm.es/~rrdelrio/

UNIVERSIDAD DE OTOÑO, CDL
25 de septiembre de 2008

Tipos de interés

Pago anual de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 %

Tipos de interés

Pago anual de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 %

Al cabo de un año: $1000(1+0{,}10)=$ 1100 euros

Tipos de interés

Pago anual de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 %

Al cabo de un año: $1000(1+0{,}10) = 1100$ euros

Al cabo de 2 años: $1000(1+0{,}10)^2 = 1210$ euros

Tipos de interés

Pago anual de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 %

Al cabo de un año: $1000(1 + 0{,}10) = 1100$ euros

Al cabo de 2 años: $1000(1 + 0{,}10)^2 = 1210$ euros

Al cabo de 3 años: $1000(1 + 0{,}10)^3 = 1331$ euros

Tipos de interés

Pago anual de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 %

Al cabo de un año: $1000(1+0{,}10) = 1100$ euros

Al cabo de 2 años: $1000(1+0{,}10)^2 = 1210$ euros

Al cabo de 3 años: $1000(1+0{,}10)^3 = 1331$ euros

Al cabo de 10 años

$1000(1+0{,}10)^{10} = 2593{,}74$ euros

Tipos de interés

Pago semestral de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 % con pago semestral de intereses

Tipos de interés

Pago semestral de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 % con pago semestral de intereses

Al cabo de seis meses: $1000\left(1+\dfrac{0{,}10}{2}\right)=1050$ euros

Tipos de interés

Pago semestral de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 % con pago semestral de intereses

Al cabo de seis meses: $1000\left(1+\dfrac{0{,}10}{2}\right) = 1050$ euros

Al cabo de un año

$$1000\left(1+\frac{0{,}10}{2}\right)^2 = 1102{,}50 \text{ euros}$$

Tipos de interés

Pago mensual de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 % con pago ¡mensual! de intereses

Tipos de interés

Pago mensual de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 % con pago ¡mensual! de intereses

Al cabo de un mes: $1000\left(1+\frac{0{,}10}{12}\right) = 1008{,}33$ euros

Tipos de interés

Pago mensual de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 % con pago ¡mensual! de intereses

Al cabo de un mes: $1000\left(1+\dfrac{0{,}10}{12}\right) = 1008{,}33$ euros

Al cabo de dos meses: $1000\left(1+\dfrac{0{,}10}{12}\right)^2 = 1016{,}74$ euros

Tipos de interés

Pago mensual de intereses

Depositamos 1000 euros en una cuenta a un interés (compuesto) anual de un 10 % con pago ¡mensual! de intereses

Al cabo de un mes: $1000\left(1+\dfrac{0{,}10}{12}\right)=1008{,}33$ euros

Al cabo de dos meses: $1000\left(1+\dfrac{0{,}10}{12}\right)^2=1016{,}74$ euros

Al cabo de un año

$$1000\left(1+\frac{0{,}10}{12}\right)^{12}=1104{,}71 \text{ euros}$$

Tipos de interés

¿Y si el pago de intereses fuera diario?

Tipos de interés

¿Y si el pago de intereses fuera diario?

¿Y si el pago de intereses fuera cada hora, noches incluidas?

Tipos de interés

¿Y si el pago de intereses fuera diario?

¿Y si el pago de intereses fuera cada hora, noches incluidas?

¿Y si fuera cada segundo o cada décima o cada...?

Tipos de interés

Depositamos 1 euro en una *supercuenta* a un tipo de interés anual del 100 %. ¿Cuánto dinero habrá al cabo de un año?

Tipos de interés

Depositamos 1 euro en una *supercuenta* a un tipo de interés anual del 100 %. ¿Cuánto dinero habrá al cabo de un año?

Con pago anual: $1 + 1 = 2$ euros

Tipos de interés

Depositamos 1 euro en una *supercuenta* a un tipo de interés anual del 100 %. ¿Cuánto dinero habrá al cabo de un año?

Con pago anual: $1 + 1 = 2$ euros

Con pago semestral: $\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$ euros

Tipos de interés

Depositamos 1 euro en una *supercuenta* a un tipo de interés anual del 100 %. ¿Cuánto dinero habrá al cabo de un año?

Con pago anual: $1 + 1 = 2$ euros

Con pago semestral: $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$ euros

Con pago mensual: $\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}613$ euros

Tipos de interés

Depositamos 1 euro en una *supercuenta* a un tipo de interés anual del 100 %. ¿Cuánto dinero habrá al cabo de un año?

Con pago anual: $1 + 1 = 2$ euros

Con pago semestral: $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = 2{,}25$ euros

Con pago mensual: $\left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 2{,}613$ euros

Con pago diario: $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} = 2{,}71456748$ euros

Tipos de interés

Si se hacen N pagos al cabo del año y $N \to \infty$,

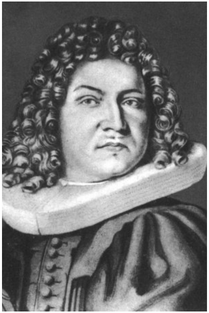
Tipos de interés

Si se hacen N pagos al cabo del año y $N \to \infty$,

entonces $\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N$, tiende al número

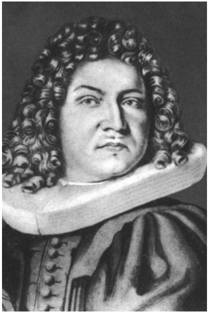
$$e = 2{,}718281828459...$$

Bernoulli y Euler



Jakob Bernoulli (1654-1705)

Bernoulli y Euler



Jakob Bernoulli (1654-1705)

Fue el primero en estudiar el límite de la expresión $\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N$ como acumulación de intereses.

Bernoulli y Euler

Leonhard Euler (1707-1783)

Bernoulli y Euler

Leonhard Euler (1707-1783)

Leed a Euler, leed a Euler. Él es el maestro de todos nosotros.
Laplace

Leamos a Euler

"Si la población en una cierta región se incrementa anualmente una trigésima parte y en cierto momento había 100000 habitantes, ¿cuál será la población dentro de 100 años?"
(Euler 1748, *Introductio* §110)

Leamos a Euler

"Si la población en una cierta región se incrementa anualmente una trigésima parte y en cierto momento había 100000 habitantes, ¿cuál será la población dentro de 100 años?"
(Euler 1748, *Introductio* §110)

Hay que calcular una expresión de la forma

$$100000\left(1+\frac{1}{30}\right)^{100}$$

Leamos a Euler

"A un hombre se le han prestado 400000 florines al interés anual, de usura, del 5 por ciento..."
(Euler 1748, *Introductio* §111)

Leamos a Euler

"A un hombre se le han prestado 400000 florines al interés anual, de usura, del 5 por ciento..."
(Euler 1748, *Introductio* §111)

Hay que calcular una expresión de la forma

$$400000\,(1+0{,}05)^{N}$$

El número de Euler

El número de Euler

Utilizando el binomio de Newton

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = 1+\frac{N}{N}+\frac{N(N-1)}{2!}\frac{1}{N^2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\frac{1}{N^3}+\ldots$$

El número de Euler

Utilizando el binomio de Newton

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N &= 1+\frac{N}{N}+\frac{N(N-1)}{2!}\frac{1}{N^2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\frac{1}{N^3}+\dots\\ &= 1+1+\frac{1(1-\frac{1}{N})}{2!}+\frac{1(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})}{3!}+\dots\end{aligned}$$

El número de Euler

Utilizando el binomio de Newton

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N &= 1+\frac{N}{N}+\frac{N(N-1)}{2!}\frac{1}{N^2}+\frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\frac{1}{N^3}+\dots \\ &= 1+1+\frac{1(1-\frac{1}{N})}{2!}+\frac{1(1-\frac{1}{N})(1-\frac{2}{N})}{3!}+\dots\end{aligned}$$

Si $N\to\infty$, entonces.....

El número de Euler

El número e se puede calcular mediante la expresión

El número de Euler

El número e se puede calcular mediante la expresión

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

El número de Euler

Pero el último paso no es correcto del todo. El mismo argumento utilizado en otros contextos puede resultar *peligroso*:

El número de Euler

Pero el último paso no es correcto del todo. El mismo argumento utilizado en otros contextos puede resultar *peligroso*:

$$1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

El número de Euler

Pero el último paso no es correcto del todo. El mismo argumento utilizado en otros contextos puede resultar *peligroso*:

$$\color{red}{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

El número de Euler

Pero el último paso no es correcto del todo. El mismo argumento utilizado en otros contextos puede resultar *peligroso*:

$$1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\ldots+\frac{1}{N}$$

El número de Euler

Pero el último paso no es correcto del todo. El mismo argumento utilizado en otros contextos puede resultar *peligroso*:

$$\color{red}{1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\frac{1}{N}+\ldots+\frac{1}{N} = 0+0+0+\ldots+0 = \color{red}{0}$$

El número de Euler

N	$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$	$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0

El número de Euler

N	$\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N$	$1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5

El número de Euler

N	$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$	$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66

El número de Euler

N	$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$	$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708

El número de Euler

N	$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$	$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708
5	2.488	2.7166

El número de Euler

N	$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$	$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708
5	2.488	2.7166
10	2.594	2.71828152

El número de Euler

N	$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$	$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708
5	2.488	2.7166
10	2.594	2.71828152
20	2.653	2.7182818284590452353 39

El número de Euler

N	$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$	$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708
5	2.488	2.7166
10	2.594	2.71828152
20	2.653	2.71828182845904523539
25	2.666	2.7182818284590452353602874687

El número de Euler

N	$\left(1+\dfrac{1}{N}\right)^N$	$1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\ldots+\dfrac{1}{N!}$
1	2.000	2.0
2	2.250	2.5
3	2.370	2.66
4	2.441	2.708
5	2.488	2.7166
10	2.594	2.71828152
20	2.653	2.718281828459045235339
25	2.666	2.718281828459045235360287468
28	2.671	2.71828182845904523536028747135254

Fourier y la irracionalidad

Joseph Fourier (1768-1830)

Fourier y la irracionalidad

Joseph Fourier (1768-1830)

Probó en 1815 que el número e es irracional.

Fourier y la irracionalidad

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

¿IRRACIONAL?

Fourier y la irracionalidad

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

¿IRRACIONAL?

1. Supongamos que $e = \dfrac{a}{b}$, con $a, b > 0$ enteros.

Fourier y la irracionalidad

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

¿IRRACIONAL?

1. Supongamos que $e = \dfrac{a}{b}$, con $a, b > 0$ enteros.
2. Entonces, $n!be = n!a$, para todo $n \geq 0$.

Fourier y la irracionalidad

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

¿IRRACIONAL?

1. Supongamos que $e = \frac{a}{b}$, con $a, b > 0$ enteros.
2. Entonces, $n!be = n!a$, para todo $n \geq 0$.
3. $n!a$ es ENTERO.

Fourier y la irracionalidad

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$$

¿IRRACIONAL?

1. Supongamos que $e = \frac{a}{b}$, con $a, b > 0$ enteros.
2. Entonces, $n!be = n!a$, para todo $n \geq 0$.
3. $n!a$ es ENTERO.
4. $n!be$ NO es ENTERO

Fourier y la irracionalidad

En efecto, si escribimos

$$e = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$$

Fourier y la irracionalidad

En efecto, si escribimos

$$e = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\right)$$

Fourier y la irracionalidad

En efecto, si escribimos

$$e = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + ...\right)$$

$$n!b\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right) \text{ es ENTERO,}$$

Fourier y la irracionalidad

En efecto, si escribimos

$$e = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\right)$$

$$n!b\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$$ es ENTERO,pero

$$n!b\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\right) =$$

Fourier y la irracionalidad

En efecto, si escribimos

$$e = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\right)$$

$n!b\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$ es ENTERO,pero

$$n!b\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\right) = b\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \ldots\right)$$

Fourier y la irracionalidad

En efecto, si escribimos

$$e = \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\right)$$

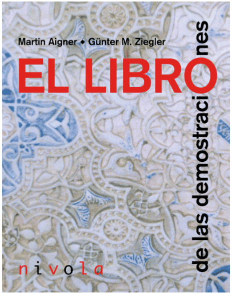
$n!b\left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right)$ es ENTERO,pero

$$n!b\left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots\right) = b\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \ldots\right)$$

Si n es suficientemente grande, es aproximadamente igual a $\frac{b}{n} < 1$.

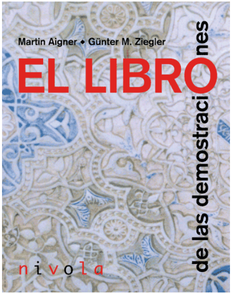
Algunos libros

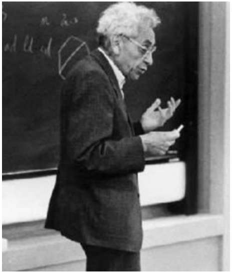
M. Aigner, G.M. Ziegler. *El libro de las demostraciones*. Nivola, Madrid, 2005.



Algunos libros

M. AIGNER, G.M. ZIEGLER. *El libro de las demostraciones*. Nivola, Madrid, 2005.

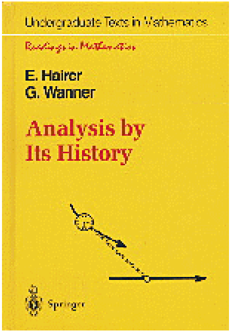




Paul Erdös (1913-1996)

Algunos libros

E. Hairer, G. Wanner. *Analysis by Its History*. Springer-Verlag, New York, 1996.

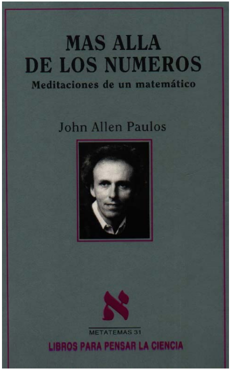


Algunos libros

E. MAOR. *e: The Story of a Number*. Princeton University Press, New Jersey, 1994.

Algunos libros

J.A. PAULOS. *Más allá de los números*. Tusquets, Barcelona, 2003.



Algunos libros

VARIOS AUTORES. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Addison-Wesley/U.A.M., Madrid, 1999.