Un paseo matemático por nuestro entorno

Roberto Rodríguez del Río

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Complutense de Madrid
http://www.mat.ucm.es/∼rrdelrio/

Matemáticas y tecnología: una relación
Universidad de Otoño-CDL, 2012
Septiembre de 2012

Recolectando néctar

¿Cuánto tiempo permanece la abeja en cada flor recolectando néctar?

La abeja encuentra la flor y comienza a *libar*.

Al principio más deprisa y, después, cada vez más lento, a medida que el néctar se va agotando.

La abeja quiere libar la mayor cantidad de néctar al final del día, para lo cual necesita *optimizar* la combinación entre el tiempo de viaje entre flor y flor y el tiempo que permanece *comiendo* en cada una.

τ tiempo medio de viaje entre flor y flor (podemos suponer que la distribución de las flores es uniforme).

$F(t)$ cantidad de néctar recolectada en el instante t, medido desde el momento en que llega a una flor dada.

La abeja quiere que la relación entre el néctar recolectado y el tiempo empleado sea máxima. Es decir, quiere optimizar la función

$$R(t) = \frac{F(t)}{\tau + t}$$

Geogebra

$$R(t) = \frac{F(t)}{\tau + t}$$

Si $R(t)$ tiene en t_0 un máximo, entonces $R'(t_0) = 0$.

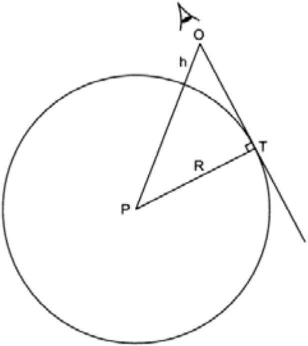
Pero $R(t) + (\tau + t)R'(t) = F'(t)$, por tanto,

$$R(t_0) = F'(t_0)$$

Teorema del Valor Marginal, Charnov (1976).

¿A qué distancia está el horizonte?

Playa de la Malagueta, Málaga



Si $OT = x$,

$$x^2 + R^2 = (R+h)^2,$$

$$x = \sqrt{(R+h)^2 - R^2}.$$

Como $h \ll R$,

$$x \approx \sqrt{2Rh}$$

Desde la orilla del mar,

tomando $R = 6371$ km y $h = 1{,}70$ m,

$$x \approx 4{,}6 \text{ km}$$

Desde el castillo de Gibralfaro, Málaga.

$h = 130$ m.

$$x \approx 40{,}7 \text{ km}$$

Desde el faro del cabo Fisterra, Galicia.

$h = 138$ m.

$$x \approx 41{,}9 \text{ km}$$

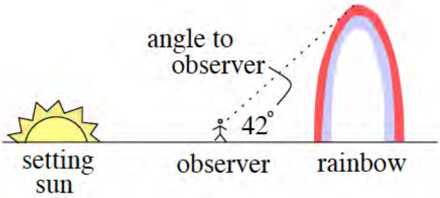
Otro faro en Galicia, punta Nariga.

$h = 28$ m.

$$x \approx 18{,}9 \text{ km}$$

El arco iris

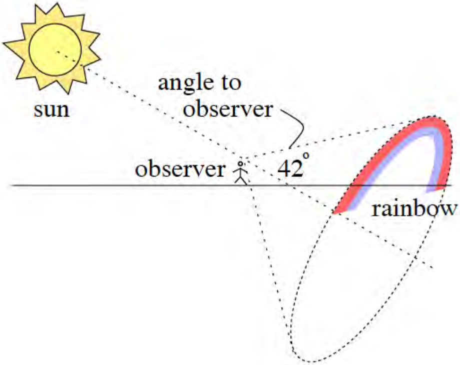
Arco iris cuando el sol está en el horizonte



Imágenes tomadas del artículo:

R.W. Hall, N. Higson. *The Calculus of Rainbows*, 1998.

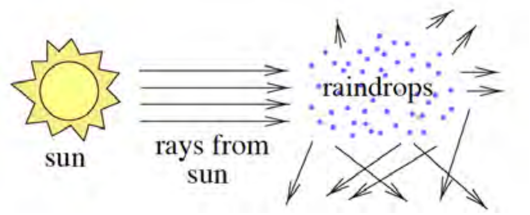
Arco iris cuando el sol está en otro punto



.

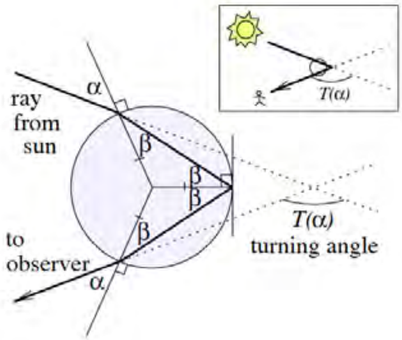
¿Por qué el ángulo es 42^o?

¿Cómo llega la luz del arcos iris hasta el observador?



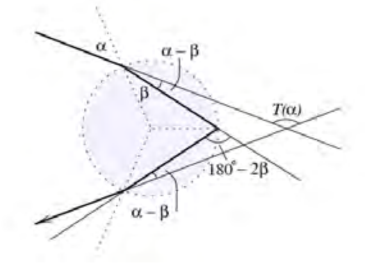
La dirección de los rayos de luz se ven alterados debido a la *refracción* y a la *reflexión*.

En una gota de agua



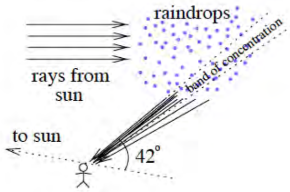
Calculemos el valor del *ángulo de desviación* $T(\alpha)$.

Cálculo de $T(\alpha)$



$$\begin{aligned} T(\alpha) &= (\alpha - \beta) + (180^o - 2\beta) + (\alpha - \beta) \\ &= 180^o + 2\alpha - 4\beta \end{aligned}$$

Concentración de la luz



A pesar de que la luz se desvía según varios ángulos, la mayor parte de la luz llega al observador cuando el ángulo de desviación es *mínimo* (o en sus valores cercanos).

Calculamos el valor de α_0 que minimiza la función $T(\alpha)$:

$$\frac{dT}{d\alpha} = 2 - 4\frac{d\beta}{d\alpha}$$

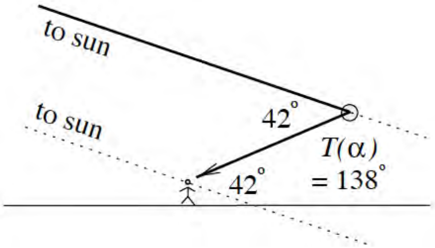
Igualando a cero la derivada y utilizando la ley de refracción $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = k$, se llega a la expresión

$$\sin^2(\alpha_0) = \frac{1}{3}(4 - k^2)$$

Para el color rojo $k = 1{,}33$, entonces $\alpha_0 = 59{,}4^o$, por tanto,

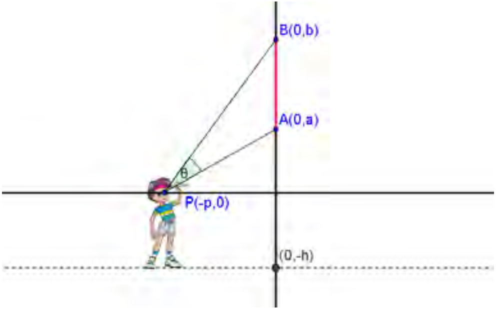
$$T(\alpha_0) = 138^o$$

Y, por esto, el ángulo con el observador es 42^o:



Un cuadro en una exposición

Problema de Regiomontano:
¿A qué distancia de la base del cuadro debe situarse el observador para que el ángulo de visión del cuadro sea máximo?

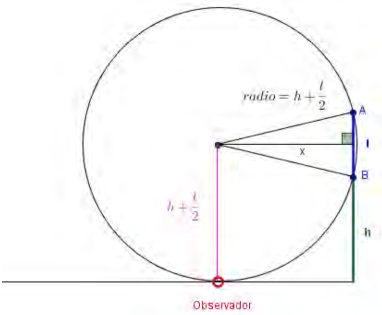


Solución del problema utilizando Geogebra:

Investigando

Probando

Solución del problema de Regiomontano:

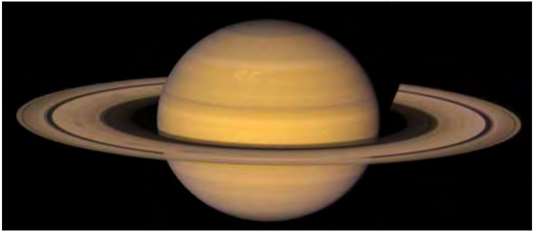


Por el teorema de Pitágoras: $x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \left(h + \frac{l}{2}\right)^2$

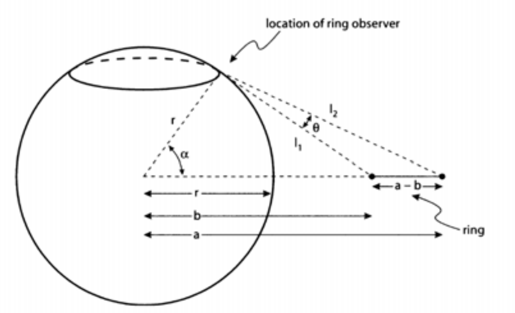
de donde

$$x = \sqrt{h(l+h)}$$

El problema de Saturno



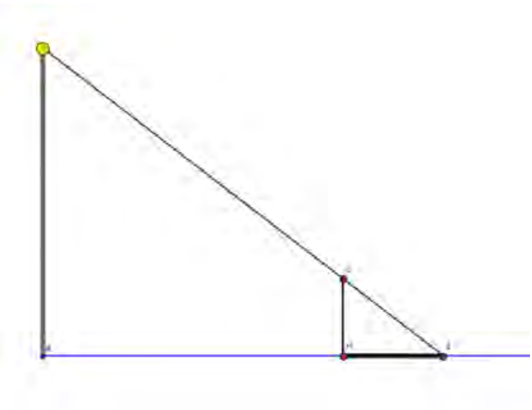
¿En qué punto nos tenemos que situar para que el ángulo θ sea máximo?



Mi sombra y yo

¿Va mi sombra cada vez más deprisa?
Si yo camino a velocidad constante, ¿mi sobra va acelerando o va a velocidad constante?

Vamos a visualizarlo con Geogebra
Investigando



$L =$altura de la farola; $\ell =$altura de la persona
$x(t) = AH$ posición de la persona en t
$s(t) = AB$ posición del punto B en t.

Por el teorema de Thales,

$$\frac{L}{s(t)} = \frac{\ell}{s(t) - x(t)}$$

de donde,

$$s(t) = \frac{L}{L - \ell} x(t)$$

Por tanto, si $\dfrac{dx}{dt}$ =Cte, entonces $\dfrac{ds}{dt}$ =Cte.

La sombra no acelera.

Referencias

- John A. Adam. *A Mathematical Nature Walk.* Princeton University Press, Princeton, 2009.

- Eric L. Charnov. *Optimal foraving: the marginal value theorem*. Theoretical Population Biology, 9, 129-136, 1976.

- R. P. Feynman. *Electrodinámica cuántica. La extraña teoría de la luz y la materia.* Alianza Editorial, Madrid, 2010.

- Paul J. Nahin. *When least is best.* Princeton University Press, Princeton, 2004.