Panegírico a:

ÉMILE BOREL Y SUS APORTACIONES ESTOCÁSTICAS

Teófilo Valdés

Universidad Complutense de Madrid

(Febrero, 2017)

BOREL, Félix Édouard Justin Émile (1871/1956)

Borel trabajó en:

- Series divergentes
- Teoría de funciones
- Probabilidad
- Teoría de juegos (de estrategia)
- Fundador (junto con Lebesgue y Baire) de la teoría de la medida

Su trabajo culminó con:

- El Teorema de Heine-Borel

Borel escribió:

- *Más de 30 libros*
- *Cerca de 300 artículos, incluyendo*
    - *Artículos netamente científicos*
    - *Artículos divulgativos de alta calidad*
    - *Más de 50 artículos dedicados a historia y filosofía de la ciencia*

Referencias

Borel, E. Leçons sur la th. des fonctions méromorphes. Paris: Gauthier-Villars, 1903. Borel, E. Leçons sur la théorie des fonctions entières. Paris: Gauthier-Villars, 1921.
Borel, E. Leçons sur la théorie des fonctions. Paris: Gauthier-Villars, 1927
Borel, E. Leçons sur lles séries divergentes. Paris: Gauthier-Villars, 1928.
Borel, E. Collection de monographies sur la théorie des fontions, 9 vols.. Paris: Gauthier-Villars, 1897-1922.
Borel, E. L´espace et le temps. Paris: Presses Universitaires de France, 1928.
Borel, E. Traité du Calcul des probabilités et de ses applications, 4 vols.. Paris: Gauthier-Villars, 1897-1922.
Borel, E. Collection de monographies sur la probabilités. Paris: Gauthier-Villars.
Borel, E. Valeur practique et philosophie des probabilités. Paris: Gauthier-Villars, 1939.
Borel, E. Le jeu, la science et les théories scientifiques modernes. Paris: Galimard, 1941.
Borel, E. L´a Evolution de la mécanique. Paris: Flammarion, 1943.
Borel, E. Les Probabilités et la vie. Paris: Presses Universitaires de France, 1943.
Borel, E. Les Paradoxes de l´infini. Paris: Galimard, 1946.

Referencias

BOREL, E. LE HASARD. PARIS: PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE, 1948. (Publicación inicial en 1913, traducido al ruso en 1923)
Borel, E., Les nombres premiers. Paris: Presses Universitaires de France, 1953. Borel, E., L´imaginaire et le réel en mathématiques et en Physique. Paris: Albin Michel, 1952.
Borel, E., Oeuvres dÉmile Borel, 4 vols.. Paris: CNRS, 1972.
Borel, E. y Deltheil, R., Probabilités, erreurs, 12th ed. Paris: Armand Colin, 1962.

Biografías

Fréchet, M., Émile Borel, philosophe et homme d´action. Paris, 1967.
Guiraldenq, P., Émile Borel, 1871-1956. Ecully, France, 1999.

¿Qué se debe a Borel desde un punto de vista estocástico?:

LOS PROBABILISTAS ADJUNTAN EL NOMBRE DE BOREL A TRES DE SUS MÁS IMPORTANTES IDEAS:

1. σ-ÁLGEBRA (O σ-CAMPO) DE BOREL
2. LEYES CERO-UNO DE BOREL-CANTELLI
3. LEY FUERTE DE LOS GRANDES NÚMEROS (TAMBIÉN CONOCIDA COMO TEOREMA DE BOREL)

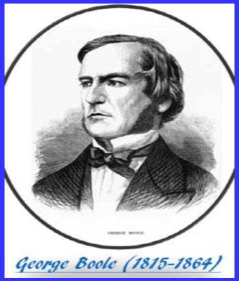
Y ALGO MENOS A:
4. TEORIA DE JUEGOS

BOREL, FÉLIX ÉDOUARD JUSTIN ÉMILE (1871/1956)

Nació: **Saint Affrique, Aveyron, Midi-Pyrénées, Francia, el 7/1/1871.**
Murió: **París, 3/2/1956.**

1871	**Nacimiento de Emile Borel.**
	Educación elemental y media en casa y en la escuela de su pueblo natal
1889-92	**Se matricula en la *École Normale Supérieure* de París.**
1894	**Recibe su doctorado en Ciencias**
1896	**Explica en la *École Normale Supérieure* de París.**
1909	**Ocupa la silla de *Teoría de Funciones*, creada para él en la Sorbonne.**
	Profesor de Teoría de Funciones entre 1909-20
	Profesor de Cálculo de Probabilidades y Física Matemática entre 1920-41
1911	**Director científico de la *École Normale Supérieure***
1914	**Se publica su libro "*LE HASARD*", traducido al ruso en 1923.**
1918	**Recibe la cruz de guerra, por sus esfuerzos durante la 1ª Guerra Mundial.**
1921-27	**Publica varios trabajos sobre Teoría de Juegos, siendo el primero que define los juegos de estrategia.**
1924-36	**Parlamentario en la Cámara de Diputados francesa.**
1925	**Ministro de la Marina (por unos meses). Algunos biógrafos**
1941	**Arrestado durante el gobierno colaboracionista de Vichy.**
	Tras su liberación trabajó para la resistencia francesa.
1945	**Recompensado con la *Medalla de la Resistencia.***
1950	**Se publica su libro *"Probabilité et Certitude"*.**
1950	**Recibe la *Gran Cruz de la Legión de Honor.***
1955	**Medalla de oro del *Centro Nnal. De la Investigación Científica*, por su trabajo científico global.**
1956	**Muere en París a la edad de 86 años.**

1.- ANTECEDENTES Y COETANEOS DIRECTOS DE LA ϭ-ÁLGEBRA DE BOREL



GEORGE BOOLE (1815-1864)

HEINRICH EDUARD HIENE (1821-1881)

RENE BAIRE (1874-1932)

HENRY LÉON LEBESGUE (1856/1922)

1.- σ-ALGEBRAS Y σ-ALGEBRAS GENERADAS

CONSTITUYEN LA BASE FORMAL DE:

- La Teoría de la Medida y de las Medidas de Probabilidad.

- Las Funciones Medibles y la Integral de Lebesgue de éstas.

- Las Variables Aleatorias y sus Momentos.

- La noción de longitud (área, volumen,...) en R y el problema de qué conjuntos de R se pueden medir en longitud.

2.- COETANEOS DIRECTOS DE LAS LEYES CERO-UNO

FRANCESCO PAOLO CANTELLI (1875-1966)

ANDREI NIKOLAYEVICH KOLMOGOROFF (1903-1987)

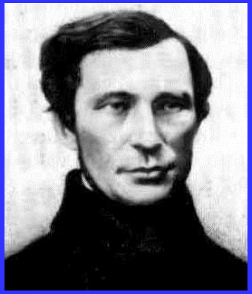
3.- ANTECEDENTES DE LAS LEYES DE LOS GRANDES NÚMEROS

JACOB BERNOULLI (1654/1705)

PIERRE SIMON LAPLACE (1749/1827)

SIMÉON DENIS POISSON (1781/1840)

PAFNUTY LVOVICH CHEBYSHEV (1821/1894)



ANDREI MARKOV (1856/1922)

FÉLIX ÉDOUARD JUSTIN ÉMILE BOREL,

(1871/1956)

JACOB BERNOULLI (1654/1705)

"ARS CONJECTANDI" (1713) DE JACOB BERNOULLI

CONSTA DE CUATRO PARTES:

1ª PARTE: ***Tratado sobre cálculos posibles en un juego de azar de Christian Huygens con comentarios de Jacob Bernoulli.***

- **Aborda distintas cuestiones concernientes a las proposiciones y problemas de Huygens.**

- **Número de formas en que pueden obtenerse m puntos al lanzar n veces un dado es el coeficiente de x^m en el desarrollo de**

$$(x+x^2+\ldots+x^6)^n.$$

- **Fórmula de Bernoulli:** $P_{mn} = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$.

2ª PARTE: ***Doctrina de las permutaciones y combinaciones.***

Consta de 9 capítulos donde desarrolla las fórmulas combinatorias con y sin repetición (Permutaciones; Combinaciones en general; Número de combinaciones sin repetición de una clase particular de casos; etc., etc.).

3ª PARTE: ***Aplicación de la teoría combinatoria a diferentes juegos de azar y dados.***

Aborda distintas aplicaciones de las fórmulas anteriores a varios casos prácticos.

“ARS CONJECTANDI” (1713) DE JACOB BERNOULLI

CONSTA DE CUATRO PARTES:

4ª PARTE: ***Aplicación del estudio previo a problemas morales, civiles y económicos.***

Incompleta por su autor. AQUÍ SE PRESENTA LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS DE BERNOULLI que establece:

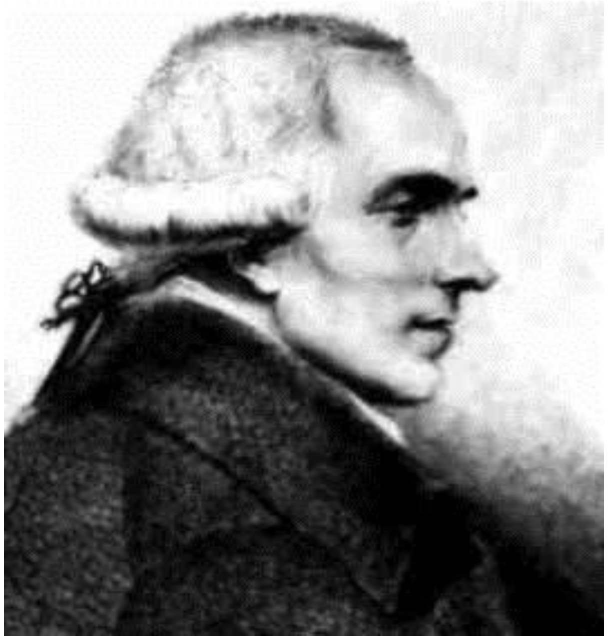
Fijado un ε>0 y para cualquier 0<η<1, si n es suficientemente grande:

$$\Pr\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\eta\,.$$

(Esta formulación es equivale estrictamente a que:

$$\lim_{n}\Pr\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=0\quad \textbf{, es decir,}\quad \frac{m}{n}\xrightarrow{P}p\,\textbf{.)}$$

CONCLUSIÓN ESENCIAL (en sus propias palabras: sentencia básica de la filosofía determinista): ***“Si todos los sucesos de ahora a la eternidad se observaran continuamente –en cuyo caso “probabilidad” se convierte en certidumbre- se encontraría que todo en el mundo ocurre por razones definidas y en definida conformidad con la ley divina…”.***



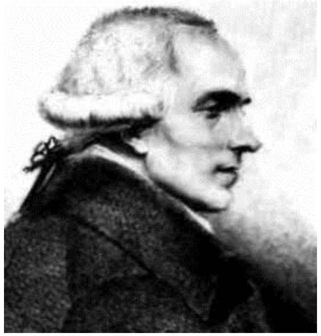
Pierre Simon Laplace (1749/1827)

THÉORIE ANALYTIQUE DES PROBABILITÉS (2 Vols.)
Laplace, Pierre Simon (1749/1827)
Primera edición publicada en 1812 (dedicada a Napoleón el Grande, dedicatoria suprimida en las ediciones posteriores).

- **Consta de dos libros:**

El primero dedicado a funciones generatrices y a aproximaciones probabilísticas.

El segundo es el esencial: contiene la definición de probabilidad, la regla de Bayes, la esperanza moral, las probabilidades de los sucesos compuestos, el problema de la aguja de Bufón, las probabilidades inversas, aplicaciones a las tablas de mortalidad y las esperanzas de vida, y el caso no simétrico de la aproximación de la binomial a la normal.



***2º LIBRO*: (Aparte de la definición de probabilidad, Bayes, etc.)**

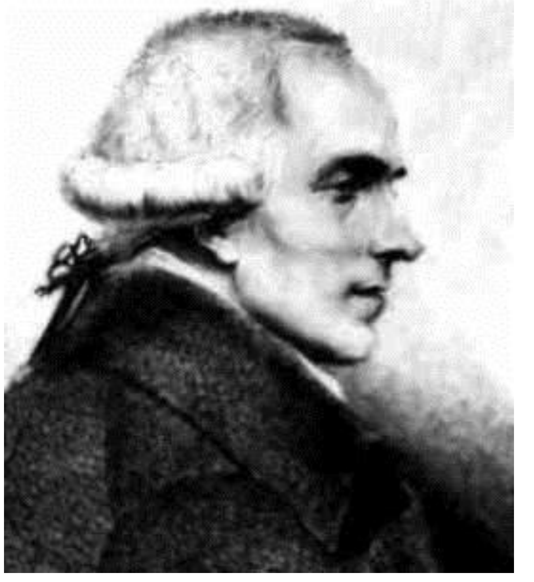
- **Da una nueva demostración del teorema de los grandes números de Jacob Bernoulli.**

- **Obtiene la distribución asintótica de de la suma de variables aleatorias independientes, cada una de las cuales admite solo valores enteros entre –a y a (donde emplea ideas básicas de transformadas).**

- **PUNTO PRIMORDIAL DEL TRATADO: Demostración del *teorema de Laplace* (generalización del teorema simétrico de *de Moivre*):**

Sea p (0<p<1) la probabilidad de ocurrencia de un suceso E en n pruebas de Bernoulli independientes, y sea m el número de pruebas en las cuales E ocurre. La probabilidad de la desigualdad

$$z_1 < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < z_2$$



difiere en una cantidad pequeña de

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z_1}^{z_2} \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)dz$$

siendo

$$z = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}.$$

- Esta ley límite es casi universal y explica las variaciones del "azar", (en sus propias palabras). Laplace otorgó una gran importancia a este teorema. Sin embargo (posiblemente debido a su carácter), Laplace interpreta erróneamente las aplicaciones de de sus contribuciones al Cálculo de Probabilidades. Su error básico es que él considera que la historia de la sociedad humana viene gobernada por el puro azar y, en consecuencia, asume que la teoría de la probabilidad es capaz de llevar a cabo el análisis completo y la explicación de de la historia.

POINCARÉ INTRODUJO EL TÉRMINO DE "LEY NORMAL", COMO LA MAS NORMAL DE LAS LEYES DE DISTRIBUCIÓN

SIMÉON DENIS POISSON (1781/1840)

APORTACIONES DE
SIMÉON DENIS POISSON (1781/1840)
(Reserches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civil -1837-)

- ***POISSON MANTIENE QUE LA TEORÍA ANALÍTICA DE LAS PROBABILIDADES ES APLICABLE A LA EVALUACIÓN DE LA BONDAD DE LAS DECISIONES JUDICIALES***

- ***Plantea el problema de determinar las probabilidades de error de las decisiones judiciales y sugiere que el teorema de Bernoulli no es de aplicación en tal caso. Sus investigaciones conducen al TEOREMA QUE ÉL DESIGNÓ COMO "LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS" Y A LA DESPUÉS LLAMADA "LEY DE LOS SUCESOS RAROS".***

Ley de los grandes números de Poisson

TEOREMA DE POISSON: ***Si se llevan acabo n pruebas independientes, en cada una de las cuales resulta la ocurrencia o no de un suceso A, y la probabilidad de ocurrencia de A no es la misma en cada prueba, entonces, con probabilidad tan próxima a uno como se desee (es decir, tan próximo a la certidumbre como se desee), se puede asegurar que la frecuencia m/n de ocurrencia del suceso A se desvía arbitrariamente poco de la media aritmética, $\overline{p}$, de las probabilidades de ocurrencia de A en las pruebas individuales. Es decir, en notación moderna:***

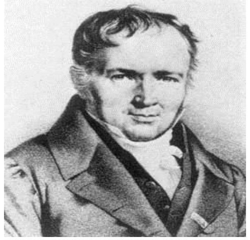
$$\lim_{n} P\left(\left| \frac{m}{n} - \overline{p} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Si las probabilidades de A en cada prueba se mantienen constantes, el teorema de Poisson se reduce al de Bernoulli.

Según Poisson, todos los sucesos de naturaleza moral o física están sujetas a esta ley universal. Este teorema sirvió de base para sus investigaciones relativas a la corrección de las decisiones judiciales. En el libro se presentan fórmulas basadas en el análisis de un gran número de decisiones judiciales (la única vez que Poisson trata con datos), a partir de los cuales obtiene la *“probabilidad exacta”* de que un ciudadano se acusado, convicto o absuelto (*“supuesto que la legislación permanezca inalterada”*).

Distribución de Poisson

(Que él llamó "Ley de los pequeños números", hoy más conocida como la "Ley de los sucesos raros")



Poisson justifica: ***A medida que el valor de p se desvía de ½ , la aproximación asintótica de Laplace para P_{mn}≡probabilidad de m ocurrencias de A en n pruebas, por medio de***

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad , \qquad \left(con\ \ x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}} \right)$$

se hace cada vez menos precisa. El problema es pues cómo obtener una fórmula asintótica que sea adecuada para pequeños valores de p. Así obtiene que

$$P_{mn} \to \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},$$

cuando $p_n \to 0$ y $np_n \to \lambda$. Expresión que puede ser utilizada para aproximar P_{mn} para pequeños valores de p y n grande.

El estadístico polaco L. Bortkiewicz (1868-1931) renombró la "ley de los pequeños números de Poisson" y la aplicó a los sucesos raros (muertes por coces de caballos en el ejercito prusiano, nacimientos de trillizos, etc.)

Algún historiador (e.g. F. N. David, entre otros) mantienen que la aproximación de Poisson se debe en realidad a de Moivre.

¿Qué caracterizan todos estos resultados?

• Se aplican solo a pruebas dicotónicas con dos únicos resultados posibles (éxito y fracaso).

• Pueden identificarse con lanzamientos de monedas.

• Este tipo de pruebas se conocen con el nombre de "Pruebas de Bernoulli" (en memoria).

→ Estos resultados son importantísimos, pero son restringidos.

→Su aplicación en la época de su publicación es inexistente o errónea (en la mayoría de los casos).

→ No se intuye su aplicabilidad "inferencial"

Y EN ESTO SE LLEGA A:

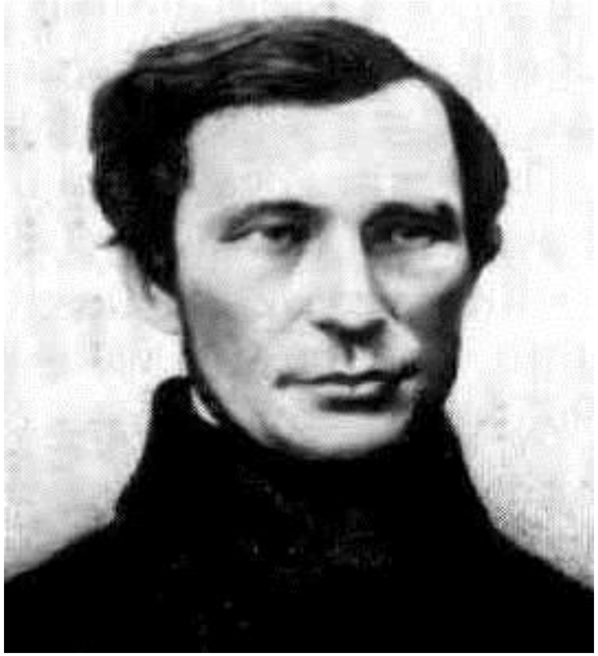
ESCUELA DE SAN PETERSBURGO (LA MODERNIDAD)

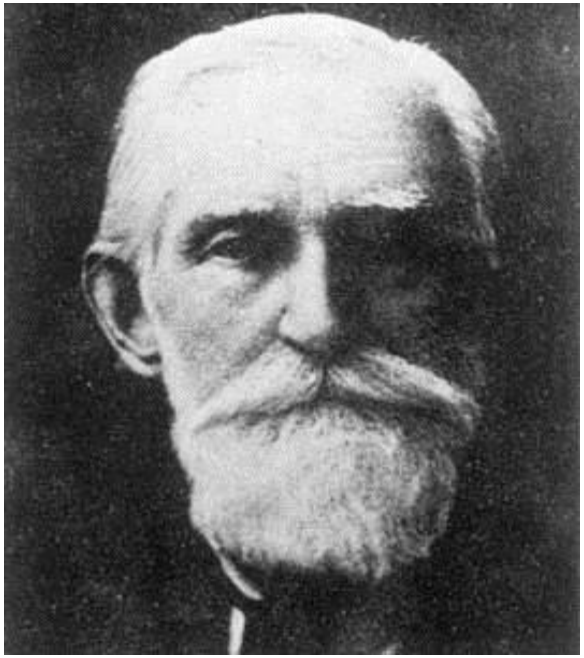
Esencialmente:

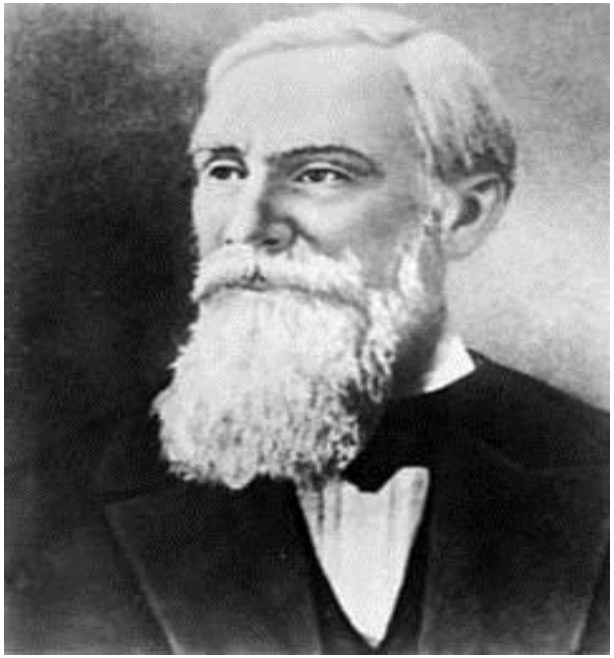
CHEBYSHEV, Pafnuty Lvovich (1821/1894)
MARKOV, Andrei Andreevich (1856/1922)
(LYAPUNOV, Alexander Mikhailovich (1857/1918))

Y A LA FIGURA CENTRAL DE ESTA CHARLA (CONTINUACIÓN DE LA ESCUELA FRANCESA)

BOREL, Félix Édouard Justin Émile (1871/1956)



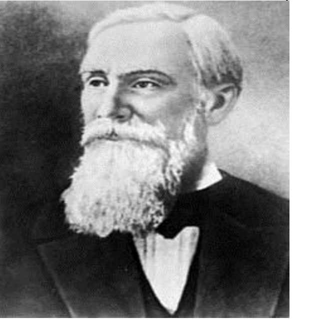




CHEBYSHEV, Pafnuty Lvovich (1821/1894)

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS EN SITUACIÓN DE POISSON

(Tesis de maestro (1846))



$$P\left(\left|\frac{X}{n}-\overline{p}(n)\right|<\varepsilon\right)\underset{n}{\to}1 \quad (\forall \varepsilon>0)$$

X ≡ nº de éxitos en n pruebas independientes de Bernoulli con probabilidad p_i de éxito en la i-ésima.

$$\overline{p}(n)=\frac{1}{n}\sum_{i}^{n}p_i$$

(Resultado que se mantuvo ignorado hasta entrado el siglo XX y buscaba acotaciones de las probabilidades de las colas superior e inferior: ***En esta época, la desigualdad de Chebyshev/Bienaymé era aún desconocida)***

LEY GENERAL (DÉBIL) DE LOS GRANDES NÚMEROS

1867: Liuoville´s J. Math. Pures Appl. (2), 12, 177-184 (simultáneamente en ruso)

<u>Ley de los grandes números de Chebychev:</u>

Si X_n: (Ω,F,P) → (R,B) son v.a.´s incorreladas (no necesariamente independientes) y con segundos momentos acotados y $S_n=X_1+\ldots+X_n$:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \quad \equiv \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n - E(S_n)}{n}\right| \le \varepsilon\right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$

o, (si $\overline{X}_n = S_n/n$)

$$\overline{X}_n - E(\overline{X}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \quad \equiv \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)\right| \le \varepsilon\right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Este resultado es consecuencia directa de la desigualdad de Chebychev, quien la obtuvo como subproducto de la propia demostración. Lo que es esencial es que $V(S_n)=o(n^2)$, en notación Landau. (Este resultado fue mejorado posteriormente por Markov, Kintchine, Rachjman y Kolmogorov)

ANDREI MARKOV (1856/1922)

- **EXTENSIONES AL PROBLEMA DE LA CONVERGENCIA DE MOMENTOS**

En la tercera edición de su libro ("Cálculo de Probabilidades") Markov incorpora la demostración de la convergencia de las distribuciones a partir de la convergencia de los momentos para distribuciones límite no gaussianas. En particular, para las densidades siguientes:

$$A\exp(-x^2)|x|^\nu \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$A\exp(-x)x \qquad (x > 0) \to Gamma$$

(M. Pólya, en 1920, demostró este resultado para otras distribuciones continuas límite)

- **EXTENSIONES A LAS LEYES DE LOS GRANDES NÚMEROS BAJO INDEPENDENCIA A TRAVÉS DE LA TÉCNICA DEL TRUNCAMIENTO**

En 1910, Markov utiliza por primera vez el método del truncamiento de variables aleatorias para probar que la Ley de los Grandes Números continúa siendo cierta bajo independencia si, para algún p>1, los momentos $E|\xi_n|^p$ estén acotados.

(Chebyshev había demostrado este resultado para p=2)

- **DEPENDENCIAS ESTOCÁSTICAS: EXTENSIONES DE LAS LEYES LÍMITE BAJO DEPENDENCIA**

→1906: "La extensión de la ley de los grandes números sobre variables mutuamente dependientes"

En esta memoria Markov prueba para $\{\xi_n\}$ que, si la varianza de $\xi_1+\ldots+\xi_n$ crece mas despacio que n^2, la ley de los grandes números continúa válida sin importar el tipo de dependencias existentes entre ellas.

→1907: "Investigación de un caso de relevante de pruebas dependientes"

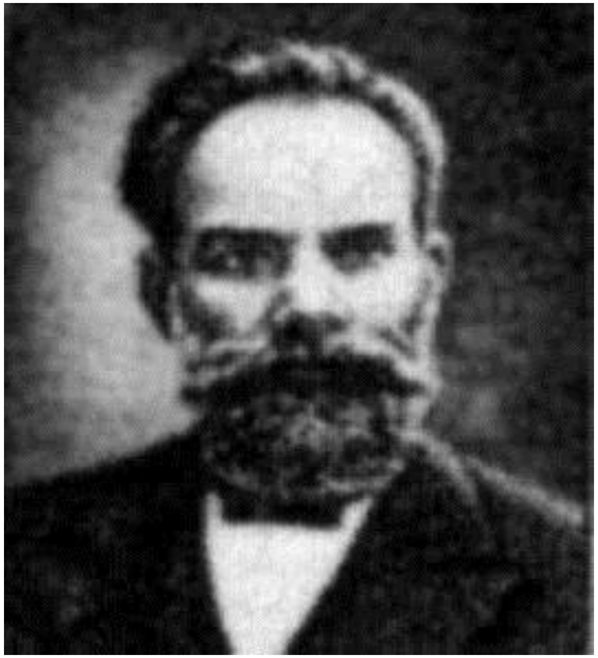
Prueba un Teorema Central para una cadena homogénea $\{\xi_n\}$ con dos estados 0/1.

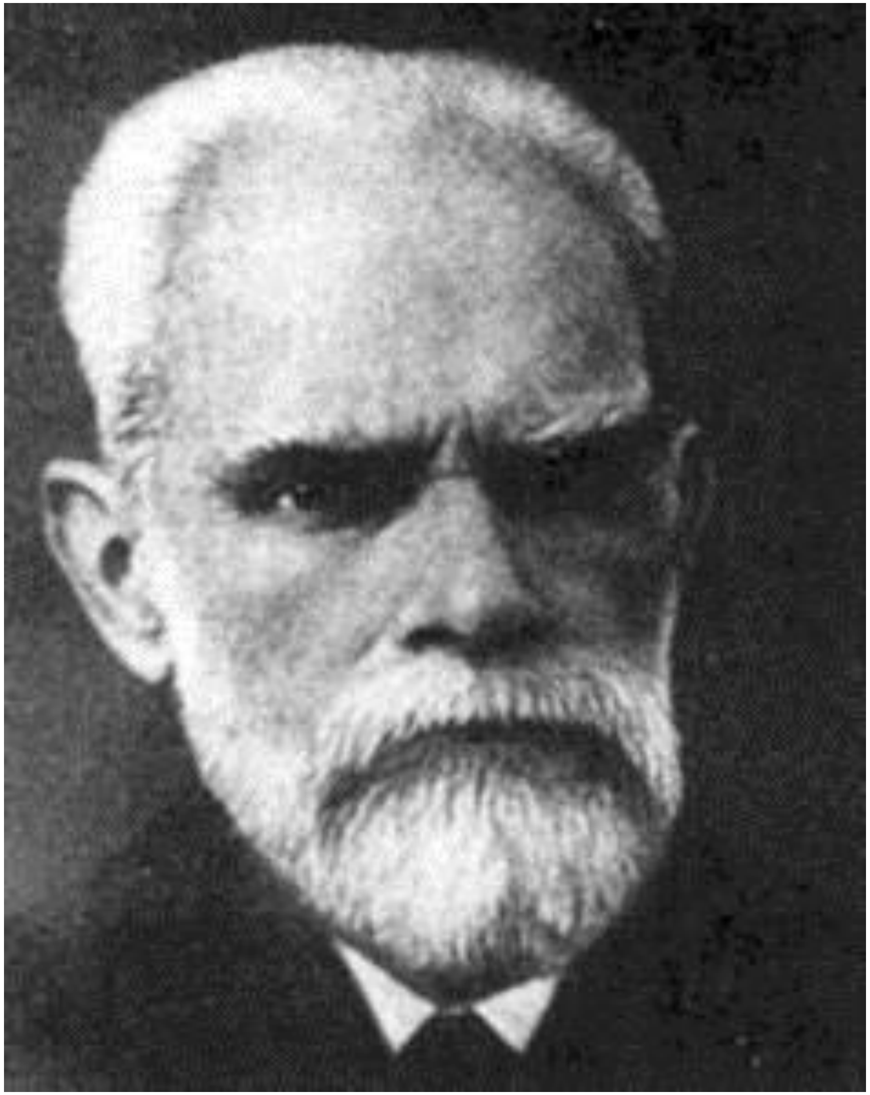
→1908: "Extensión de los teoremas del límite del Cálculo de Probabilidades para sumas de variables conectadas en cadena"

Generaliza el anterior Teorema Central para cadenas homogéneas arbitrarias.

→1911/12: Propone distintas generalizaciones de sus cadenas (Cadenas de Markov/Bruns y cadenas parcialmente observadas)

Nuevos resultados sobre comportamiento límite para ellas.





A. LYAPUNOV (1857/1918)

BOREL, Félix Édouard Justin Émile (1871/1956)

PRIMERA LEY FUERTE

- BOREL DEMUESTRA LA PRIMERA LEY FUERTE CON SUS NÚMEROS SIMPLEMENTE NORMALES.

- DA UNA INTERPRETACIÓN A SU LEY FUERTE Y FORMULA LA CONOCIDA PARADOJA DE BOREL.

- LOS NÚMEROS NORMALES DE BOREL HAN DADO ORIGEN A OTRAS MUCHAS PARADOJAS SIN NOMBRE.

TRAS ELLA

- PLANTÉA E INCITA A LOS MATEMÁTICOS DE SU TIEMPO A ESTABLECER CONDICIONES BAJO LAS CUALES SE VERIFICA LA LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS EN **SENTIDO FUERTE**

¿QUÉ DIFERENCIA LA LEY FUERTE DE LA LEY DÉBIL?

Hace referencia a dos tipos de convergencias estocásticas: la convergecia en probabilidad y la convergencia casi segura (o con probabilidad 1).

Dada la sucesión de v.a.´s $X_n: (\Omega, F, P) \rightarrow (R, B)$:

- Se dice que X_n verifica la ley débil si:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \quad \equiv \quad \lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{S_n - E(S_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1, \ \forall \varepsilon > 0$$

- Se dice que Xn verifica la ley fuerte si:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0 \quad \equiv \quad P\left(\lim_{n\to\infty} \left(\frac{S_n - E(S_n)}{n} \right) = 0 \right) = 1$$

TEOREMA DE BOREL:

Si X_n son v.a.´s de Bernoulli(1/2), se verifica que

$$\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{n\to\infty}{\overset{c.s.}{\longrightarrow}} \frac{1}{2} \qquad \equiv \qquad P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2} \right) = 1$$

Es decir, si m es el número de caras en n lanzamientos de una moneda, se verifica que:

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \frac{1}{2} \right) = 1$$

(El resultado de Bernoulli fue: $\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) = 1$ ***)***

¿QUÉ SON LOS NÚMEROS NORMALES DE BOREL?

Un número $0 \leq w \leq 1$ se dice que es normal (en base b), si escrito en dicha base como

$$w = o.c_1(w)c_2(w)c_3(w)\ldots_{b)},$$

La frecuencia relativa de cualquier dígito k, k=0,1,…,b-1, en las n primeras cifras tiende a estabilizarse en 1/b, cuando $n \to \infty$; es decir:

$$\exists \lim_{n \to \infty} \frac{v_k^{(n)}(w)}{n} = \frac{1}{b}$$

RESULTADO DE BOREL: ***Excepto en un conjunto (de Borel) con medida de Lebesgue nula, todo número es simplemente normal. Empleando una expresión probabilística (puesto que la medida de Lebesgue en*** **[*0,1*]** ***es una probabilidad, todo número es casi seguro (o con probabilidad 1) simplemente normal. Es decir,***

$$\lambda\left(\bigcap_{k=0}^{b-1}\left\{w \mid \lim_{n\to\infty}\frac{\nu_k^{(n)}(w)}{n}=\frac{1}{b}\right\}\right)=\lambda\left(\bigcap_{k=0}^{b-1}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_k^{(n)}}{n}=\frac{1}{b}\right)\right)=1.$$

Obsérvese (en base 2), las funciones (variables aleatorias) $c_1(w)$, $c_2(w)$, $c_3(w)$,... son de Bernoulli(1/2). Razonando para k=1: Sea

$$X_i = I_{(c_i=1)} \approx Bernoulli(1/2).$$

De donde, se concluye que: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\nu_1^{(n)}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ **, casi seguro (o con probabilidad 1). Es decir,**

$$\lambda\left(\frac{\nu_1^{(n)}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\right)=1.$$

Puesto que lo mismo puede razonarse para la cifra k=0, se concluye que

$$\lambda\left(\bigcap_{k=0}^{1}\left(\frac{\nu_k^{(n)}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}\right)\right)=1,$$

“casi todo” número es simplemente normal.

SE CONCLUYE DEL TEOREMA DE BOREL (si N_b es el conjunto de números normales en base b=2,3,…, dentro del intervalo (0,1]):

- **$\lambda(N_2)= \lambda(N_3)= \lambda(N_4)=\ldots.=1$; es decir, casi seguro, todo número es normal en base b, cualquiera que esta sea.**

- **$\lambda(\cap_b N_b)=1$; es decir, todo número es, casi seguro, normal en todas las bases.**

- **Se sigue de lo anterior que, casi seguro, todo número es normal por rachas de longitud *r*, en cualquier base.**

- **Todo número es, casi seguro, normal para cualquier base *b=2,3*,… y en cualquier racha *r*=1,2,….**

PARADOJA DE BOREL:

- Tomemos un las obras completas de Cervantes o Shakespeare.

- Incluyamos todas las letras (mayúsculas y minúsculas), las puntuaciones (coma, punto, punto y aparte,…), e incluso todos los caracteres tipográficos.

- Considerar todo lo anterior es equivalente a trabajar con una cierta base *b* (¿por qué?).

- Las obras completas de Cervantes o Shakespeare se corresponden con una racha en la base citada (¿por qué?)

POR TANTO:

Si cogemos un número cualquiera del intervalo (0,1] y lo escribimos en la anterior base *b*, aparecerán reproducidaslas obras completas de cualquiera de estos autores (o de ambos; o de una cantidad numerable de autores) infinitas veces

OTRA FORMA DE ENUNCIAR LA PARADOJA DE BOREL -1-:

- Consideremos las obras completas de Cervantes o Shakespeare como una racha en base 2 (por ejemplo, escribiéndolas en morse).

- Enseñemos morse a un mono (es decir, hagamos que un mono de una respuesta binaria –punto y raya- a un estímulo). Por ejemplo, enseñémole a tocar dos tambores.

- Hagamos que el mono repita sucesiva e infinitamente los puntos y rayas, es decir, que toque sucesivamente cualquiera de los dos tambores.

- La secuencia de sonidos de los tambores (de puntos y rayas, en morse), siendo equivalente a un número escrito en base 2, REPRODUCIRÁ LAS OBRAS COMPLETAS DE CERVANTES Y/O SHAKESPEARE CON SEGURIDAD.

POR TANTO, NI CERVANTES NI SHAKESPEARE TUVIERON MÉRITO ALGUNO.

OTRA FORMA DE ENUNCIAR LA PARADOJA DE BOREL -2-:

TEOREMA DE LOS INFINITOS MONOS (la imagen original fue presentada por Borel en 1913 "Mécanique Statistique et Irréversibilité" , J. Phys. 5e série, vol. 3, 189-196):

Pongamos un mono delante de una máquina de escribir y hagamos que pulse las teclas infinitas veces (o que infinitos monos pulsen las teclas):

Con seguridad (es decir, con probabilidad 1), el mono acabaría escribiendo las obras completas de Cervantes y/o Shakespeare (o todas las obras de una biblioteca cualquiera)

POR TANTO, NI CERVANTES NI SHAKESPEARE NO TIENEN NINGÚN MÉRITO.

Existen antecedentes (sin justificar) del teorema de los monos:

En *Los viajes de Gulliver (1782)* de *Jonathan Swift*, se anticipa la idea central. En la parte 3, capítulo 5, se describe un profesor de la *Grand Academy of Lagado*, que intenta crear todo el conocimiento científico de la época haciendo que sus estudiantes creen series aleatorias de letras girando la manivela de un mecanismo.

<u>SOBRE EL EXPERIMENTO DE LOS MONOS:</u>

Gian-Carlo Rota escribió en un texto de Probabilidades: *“Si el mono pudiera apretar una tecla cada nanosegundo, el tiempo esperado que tardaría el mono en reproducir Hamlet sería tan grande que la vida esperada del universo sería comparativamente insignificante…..ESTE NO ES UN MÉTODO PRÁCTICO DE ESCRIBIR OBRAS”*

Sin embargo:

Existe *“The monkey Shakespeare Simulator” (Julio, 2003)* que simula una gran población de monos tecleando aleatoriamente, con la intención de ver cuanto lleva a los monos virtuales reproducir una obra completa de Shakespeare. Por ejemplo, se han generado secuencias completas de *“Julio Cesar”.*

En 2003, científicos de Zoo de Paignton y de la Universidad de Plymouth (Devon, Inglaterra) reportaron que habían dejado un teclado en la jaula de 6 macacos durante un mes, *“not only did the monkeys produce nothing but 5 pages consisting largely of the letter S, they started by attacking the keyboard with a stone, and continued by urinating and defecating on it” (Monkey Theory Proven Wrong)*

OTRAS PARADOJAS DERIVADAS DEL TEOREMA DE BOREL:

- **Todo número normal es la suma de dos números no normales (¿por qué?).**
- **Los números no normales tienen longitud (probabilidad) cero (¡esto ya se ha visto!).**

POR TANTO:

¡SUMANDO NÚMEROS DE UN CONJUNTO DE LONGITUD CERO SE PUEDE LLENAR UN INTERVALO!

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE LA LEY FUERTE EN 1909:

Borel plantea en 1909 el problema de encontrar las condiciones que deben imponerse a una sucesión de variables aleatorias ξ_1, ξ_2, ξ_3,… para que se cumpla que:

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i - E\left(\xi_i\right)\right) = 0\right) = 1$$

(nomenclada como ley fuerte de los grandes números, usando el término g. n., propuesto por Poisson, al resultado de Bernoulli y sus extensiones)

En la década de 1920/30, la Escuela de San Petersburgo entra en declive y su papel relevante es asumido por la Universidad de Moscú

Primero

BERNSTEIN, Sergei Natanovich (1880/1968)

inicia el cambio.

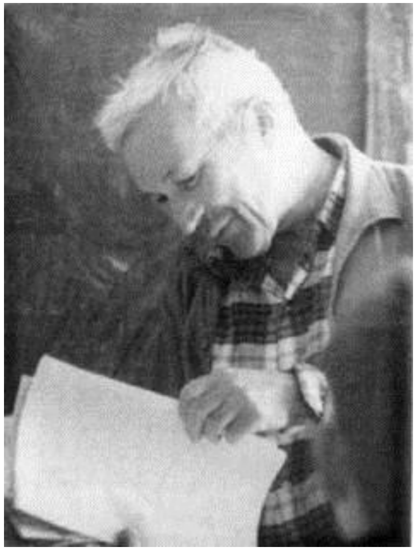
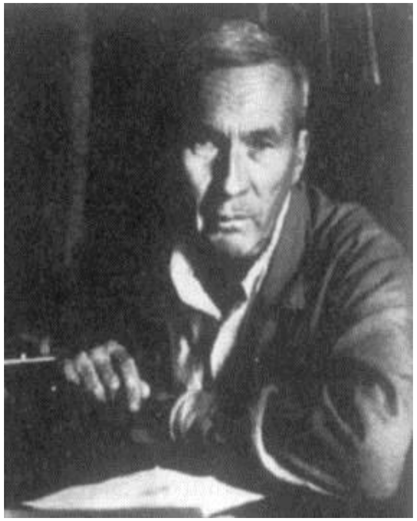
Los personajes más relevantes de la Unversidad de Moscú:

KHINTCHINE, Aleksandr Yakovlevich (1894/1959)
KOLMOGOROV, Andrei Nikolayevich (1903/1987)

Inicio de la época contemporánea

Kintchine, A. Y. (1894/1959)


A. N. KOLMOGOROV! (1903/87)

4.- TEORÍA DE JUEGOS

- Borel (entre 1921 y 1927) define formalmente los Juegos de Estrategia.
- John von Neumann en 1928 publica su primer artículo sobre el tema.
- En 1944, John von Neumann y Oskar Morgerstern publican el texto clave: Theory of Games and Economic Behaviour.
- En 1950, Albert Tucker plantea el dilema del prisionero.
- En 1950, John Nash (bajo la dirección de Tucker) publica su tesis “Juegos no cooperativos”.
- En 1994, Nash recibe el Premio Nobel de Economía.
- En 2012, Lloys Shapley y Alvin Roth reciben igualmente el Premio Nobel de Economía.

BOREL:

- Es uno de los matemáticos más reconocidos del siglo XX.
- Frechet le cataloga como científico (filósofo) y hombre de acción.

- Como científico fue director de la escuela Normal (1911) y del Instituto Henri Poincaré (1927). Presidente de la Academia de Ciencias (1934).

- Como político llegó a ser fue Ministro de la Marina con Painlevé (en 1925). Su ideología política radical-socialista le había llevado en 1924 a la Cámara de los Diputados. En 1941 fue arrestado por las autoridades alemanas de ocupación (a diferencia de otros hombres de ciencias y letras que colaboraron con el gobierno de Vichy).

(En París existe una calle y una plaza con su nombre. Un cráter de la luna fue bautizado igualmente en su nombre).

CRONOLOGÍA GENERAL

		Directamente relacionados con las leyes límites	Otros probabilistas eminentes	
Guerra de los 30 años, 1618			*Pascal, B. (1601/65)*	
			Fermat P. (1623/62)	
			Huygens, C. (1629/95)	
Trat. de Westfalia, 1648	1650			1650
		Bernoulli, Jacob (1654/1705)		
		de Moivre, Abraham (1667/1754)	*Bernoulli, Johann (1667/1748)*	
Guerras de religión	75			75
Guerra de Sucesión, 1702	1700		*Bayes, T. (1702/63),*	1700
Trat. de Utrecht, 1713			*Euler, L. (1707/83)*	
			Simpson, T. (1710/61)	
	25		*Bernoulli, Daniel*	25
Muerte de Federico Guillermo I, guerra de suces. de Austria, 1740	50	*Laplace,P.S. (1749/1827)*		50
Independencia USA, 1776	75	*Poisson, S. D. (1781/1840)*	*Gauss, C.F. (1777/1855)*	75
Rev. Francesa, 1789			*Quetelet, L.A.J. (1796/1874)**	
	1800			1800

CRONOLOGÍA GENERAL

	1800			1800
Ind. Colonias esp. y port.	10			10
1ª abdicación de Napoleón, 14	14			
	20	*Chebyshev, P.L.(1821/1894)*		20
		Galton, F(1822/1911) *		
	30			30
Marx y Engels: manifiesto comunista, 1847	40			40
	1850	*Markov, A.A. (1856/1922)*		1850
		Liapunov, A.M. (1857/1918)		
Guerra de secesión USA, 1861	60	*Pearson, K. (1857/1936)* *		60
		Weldon, W.F.R. (1860/1906) *		
Gran depresión, 1873	70	*Borel, E.(1871/1956)*		70
			Gosset,W.S. (1876/1937) *	
	80		*Bernstein, S.N. (1880/1968)*	80
			Von Mises, R.E. (1883/1953)	
	90	*Fisher, R.A. (1890/1962)* *		90
		Kintchine, A.Y. (1894/1959)		
Guerra ruso-japonesa, 1904	1900	*Neyman,J. (1894/1981)* *		1900
Rev. rusa fallida, 1905		*Pearson, E.(1895/1980)* *		
	10	*Kolmogorov, A.N. (1903/87*	*Gnedenko, B.V.(1912/95)*	10
Rev. Bolchevique (1917)				
1ª Guerra Mundial (1918)	20			20
2ª Guerra Mundial	1940			40

GRACIAS