

II Concurso de Modelización Matemática del IMI

CMM-IMI

2019

¿CUÁNTO PODRÍAMOS REDUCIR LA DURACIÓN DE UN VIAJE TRIPULADO A MARTE UTILIZANDO UNA NAVE PROPULSADA?

Si la nave espacial dispone de un motor capaz de proporcionar una fuerza de empuje constante de 20,28 N con un consumo de combustible de 35 kg/día, se trata de encontrar el ángulo de orientación óptimo, $\gamma(t)$, que debe formar en cada instante de tiempo t , la dirección del empuje del motor con la dirección transversal al radio vector heliocéntrico de la trayectoria propulsada, para transferir una nave de masa 15000 kg desde una órbita circular alrededor del Sol a una distancia de 149597870 km, hasta una órbita circular lo más alejada posible en $t_f = 150$ días. En este instante t_f de apagado del motor, la nave debe permanecer en órbita circular heliocéntrica.

DATOS:

$$m_i = 15000 \text{ kg}, \quad F = 20,28 \text{ N}, \quad \dot{m} = -35 \text{ kg/día}, \quad t_f = 150 \text{ días},$$

$$r_i = 149597870 \text{ km} = 1 \text{ UA}, \quad \text{velocidad en la órbita circular inicial: } \sqrt{\frac{\mu_S}{r_i}},$$

$$\text{constante heliocéntrica de gravitación: } \mu_S = 1,3271244 \cdot 10^{20} \text{ m}^3\text{s}^{-2}.$$

SE PIDE:

1) Obtener para las variables de estado distancia heliocéntrica, $r(t)$, velocidad radial, $v_R(t)$, y velocidad transversal, $v_T(t)$, las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= v_R, \\ \dot{v}_R &= \frac{v_T^2}{r} - \frac{\mu_S}{r^2}, \\ \dot{v}_T &= -\frac{v_R v_T}{r}, \end{aligned}$$

correspondientes al movimiento de la nave sin propulsión en el campo gravitatorio del Sol, modelizado por la ecuación:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu_S \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

donde \mathbf{r} es el radio vector heliocéntrico de posición (ver Figura 1) y $r = \|\mathbf{r}\|$.

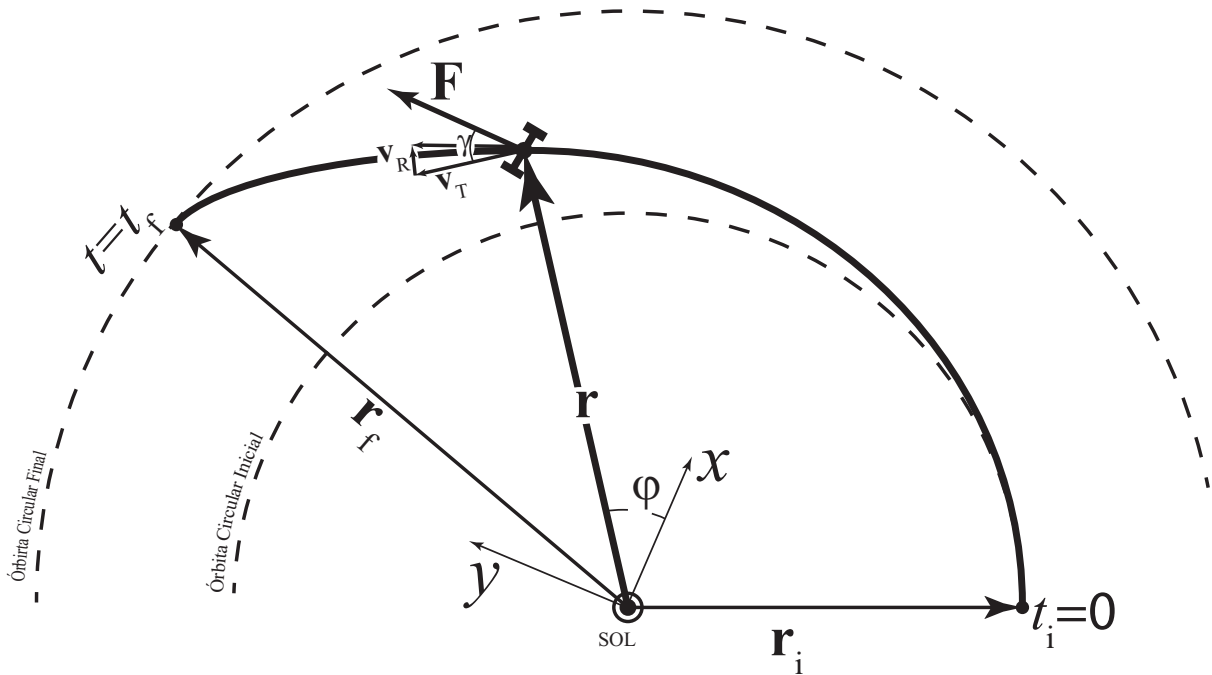


Fig. 1: Variables de estado y de control.

- 2) Incluir en el modelo anterior el efecto de la propulsión del motor y establecer una metodología matemática para determinar el ángulo de orientación óptimo, $\gamma(t)$, que debe formar en cada instante la dirección del empuje con la dirección transversal (i.e. perpendicular a \mathbf{r}) para alcanzar en t_f una órbita circular a la máxima distancia.
- 3) Determinar los valores de la distancia alcanzada y del ángulo de orientación a los 90 días y de la distancia final a los 150 días en la órbita propulsada mediante la orientación óptima.
- 4) Representación gráfica de los valores de las variables de estado, r , v_R , y v_T , y de control γ en función del tiempo, para la solución óptima.
- 5) Representación gráfica de toda la trayectoria propulsada de la nave (entre las órbitas inicial y final alrededor del Sol) y de la dirección del empuje en un conjunto significativo de puntos de la trayectoria.
- 6) ¿Se podría alcanzar la órbita de Marte en 90 días con un motor que proporcionase el doble de empuje? ¿y con el triple? ¿Qué distancias finales se alcanzarían en estos casos?