Problema propuesto en el VI Concurso de Modelización Matemática del IMI (CMM-IMI 2023)

Aterrizaje vertical de cohetes espaciales

José Manuel González Vida
Universidad de Málaga

28 de septiembre de 2023

1. Introducción

Figura 1: Aterrizaje en vertical de un cohete

En los últimos años hemos asistido a una revolución en el diseño de cohetes espaciales. El ahorro de costes, la posibilidad de reutilización de los cohetes propulsores de naves espaciales, la posibilidad de la llegada del hombre a Marte, etc. ha introducido nuevas perspectivas y objetivos en este campo de la ingeniería espacial. Aterrizar de manera autónoma una nave espacial o un cohete es un auténtico desafío, pero aún lo es más el poder hacerlo en un lugar predeterminado y con una determinada precisión. En este sentido, en los últimos años hemos asistido a mejoras en los algoritmos de aterrizaje de las naves espaciales, donde apenas hace una década la denominada elipse de aterrizaje se medía en unidades del orden de decenas de kilómetros (de ahí el aterrizaje de naves o sondas espaciales en zonas desérticas u océanos) a aterrizaje en vertical de cohetes incluso en plataformas móviles situadas en el océano. Es decir, en los últimos años se ha pasado de medir las elipses de aterrizaje del orden de decenas de kilómetros al orden de metros.

Estos avances han venido sin duda de la mano de una resolución más precisa de los problemas matemáticos que conllevan estos retos. Pero quizás, proponer para este concurso un problema más completo de aterrizaje vertical de una nave espacial sea un problema demasiado complejo para el tiempo de que se dispone. Sin embargo, vamos a proponer un problema más sencillo que creemos bastante atractivo y donde pretendemos resolver este tipo de aterrizajes en vertical.

Los problemas que se proponen en los siguientes apartados son problemas matemáticos simplificados en los que se pide el planteamiento matemático del problema propuesto y también una resolución numérica del mismo, ayudados de códigos realizados preferentemente en Python o Matlab.

2. Problema propuesto: Aterrizaje vertical óptimo de una nave espacial

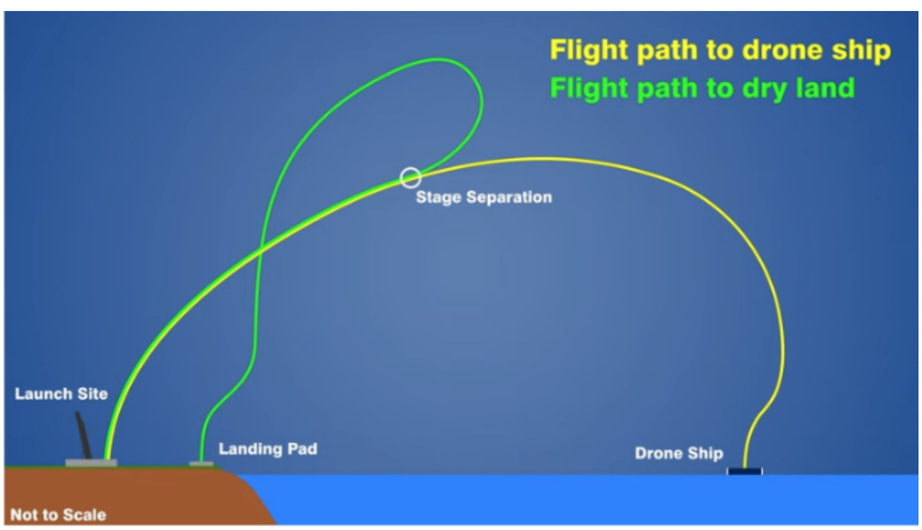

Figura 2: Esquema de las trayectorias de los cohetes lanzadores para aterrizar en las plataformas de tierra o en el mar.

Consideremos el problema de optimizar el perfil de empuje para que una nave espacial realice un aterrizaje en una posición objetivo. La dinámica de la nave viene dada por la ecuación:

$$m\ddot{p} = f - mge_3,$$

donde $m > 0$ es la masa de la nave espacial, $p(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ es la posición de la nave espacial, siendo 0 la posición de aterrizaje objetivo, $e_3 = (0, 0, 1)$, $f(t) \in \mathbb{R}^3$ la fuerza de empuje y $g > 0$ es la aceleración de la gravedad (por simplicidad supondremos que la masa de la nave espacial es constante aunque ésta no es una buena suposición en la realidad ya que la masa de la nave decrece con el consumo de combustible. También se ignorará la fricción atmosférica). Se debe tener que $p(T^{\text{at}}) = 0$ y $\dot{p}(T^{\text{at}}) = 0$, donde T^{at} es el tiempo de aterrizaje. La nave espacial debe permanecer en la región dada por

$$z(t) \geq \alpha \|(x(t), y(t)\|_2,$$

donde $\alpha > 0$ se denomina pendiente de planeo mínima (se supone conocida). La posición inicial $p(0)$ y la velocidad $\dot{p}(0)$ son conocidas. La fuerza de empuje $f(t)$ se obtiene de un único propulsor de la nave espacial, con un empuje máximo dado, $F^{\text{máx}}$; un sistema de control de altitud gira la nave para conseguir cualquier dirección de empuje deseada. Por tanto la fuerza de empuje se caracteriza por la restricción $\|f(t)\|_2 \leq F^{\text{máx}}$. La tasa de uso de combustible es proporcional a la magnitud de la fuerza de empuje, por lo que el uso total de combustible es

$$\int_0^{T^{\text{at}}} \gamma \|f(t)\|_2 dt,$$

donde $\gamma > 0$ es el coeficiente de consumo de combustible.

Supondremos que la fuerza de empuje se discretiza con el tiempo en el que estudiamos el problema, es decir, es constante a lo largo de K periodos de tiempo consecutivos de tamaño $\Delta t > 0$, con $f(t) = f_k$ para $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t)$, para $k = 0, \dots, K-1$, donde $T^{\text{at}} = K\Delta t$. Por tanto, tenemos

$$v_{k+1} = v_k + (\Delta t/m) f_k - \Delta t g e_3, \quad p_{k+1} = p_k + (\Delta t/2)(v_k + v_{k+1}),$$

donde p_k denota $p(k\Delta t)$, y v_k denota $\dot{p}(k\Delta t)$. Utilizaremos este modelo discreto en tiempo. Por simplicidad, impondremos la restrición de la pendiente de planeo sólo en los tiempo $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, K\Delta t$.

Se plantean las siguientes cuestiones:

(a) ***Descenso con mínimo consumo de combustible***. Dada una posición objetivo, formular el problema matemático cuya solución proporcione el perfil del empuje $f_0, \ldots, f_{K-1}$ que minimiza el consumo de combustible, fijado el tiempo de aterrizaje $T^{\text{at}} = K\Delta t$ y el paso de discretización en tiempo Δt. Diseñar un algoritmo numérico (preferentemente en Python o Matlab) para resolver el problema propuesto.

Se proponen unos parámetros sencillos* para resolver numéricamente el problema en un dominio reducido y con un coste computacional también reducido:

- $\Delta t = 1.0$,
- $g = 0.1$,
- $m = 10.0$,
- $F^{\text{máx}} = 11.0$,
- $p_0 = (50, 50, 100)$,
- $v_0 = (-10, 0, -10)$,
- $\alpha = 0.5$,
- $\gamma = 1.0$,
- Posición objetivo: $(0, 0, 0)$.

Suponiendo $K = 35$, implementar un programa (preferentemente en Python o Matlab) cuya salida gráfica muestre la trayectoria de descenso del cohete y los vectores de los perfiles de empuje para cada paso de tiempo.

Encontrar, para este caso, el consumo total óptimo de combustible.

***Notas**:

i) Puesto que en los parámetros del ejemplo no hemos introducido unidades del S.I. no será necesario expresar las respuestas con unidades de medida. Será suficiente con el valor numérico de la magnitud que se pregunta.

ii) Se sugiere el siguiente marco espacial para representar la trayectoria del cohete: $-40 \leq x \leq 55$, $0 \leq y \leq 55$, $0 \leq z \leq 105$.

(b) ***Tiempo mínimo de descenso***. Suponiendo Δt fijo, encontrar el valor mínimo de K tal que el problema de descenso con mínimo consumo de combustible planteado en el apartado (a) sea factible. Para el valor encontrado, representar gráficamente la trayectoria de descenso del cohete y los vectores de los perfiles de empuje para cada paso de tiempo. ¿Cuál es el tiempo mínimo de descenso encontrado?

2.1. Algunos vídeos para ver ideas de este problema en acción.

- Controlando el desvío de la nave Grasshoper. Cámara simple - Youtube - SpaceX.
- Controlando el desvío de la nave Grasshoper. Múltiples cámaras - Youtube - SpaceX.
- Aterrizaje histórico de la primera etapa de Falcon 9 en la zona de aterrizaje 1 (misión OG-2) - Youtube - SpaceX.
- Aterrizaje de la primera etapa del Falcon 9 — Desde helicóptero - Youtube - SpaceX.

Nota: En la valoración de las soluciones propuestas se tendrá en cuenta la claridad de los problemas matemáticos propuestos así como la calidad, en términos de eficiencia, de los programas con los algoritmos de resolución presentados.