CÁLCULO DIFERENCIAL

Muestras de examen

Febrero 2012

TEORÍA

T1. [2] Demostrar que la imagen continua de un conjunto compacto es compacto.

T2. [2.5] Definir la diferencial de una función en un punto y demostrar que si una función diferenciable en un abierto conexo tiene diferencial nula en todos los puntos entonces es una función constante.

T3. [2.5] Enunciar el lema de Schwarz sobre derivadas cruzadas y completar su demostración a partir de la igualdad

$$f(x_0+u+v)-f(x_0+u)-f(x_0+v)+f(x_0)=D_vD_uf(x_0+\alpha u+\beta v).$$

T4. [3] Enunciar y demostrar el teorema de las funciones implícitas.

PROBLEMAS

Problema 1. [3] Se considera la aplicación $f=(f_1,f_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

$$f(x,y)=\tfrac{1}{8}(x^2+y^2,y^6),$$

y denotamos $S\subset\mathbb{R}^2$ el cuadrado abierto dado por $0<x<1$, $0<y<1$. Se pide:

(1) Acotar en S la norma de los gradientes de las componentes de f.

(2) Utilizar el teorema del valor medio para probar que f es contractiva en S.

(3) Mostrar que $f(S)\subset S$.

(4) ¿Tiene f puntos fijos en S? ¿Contradice esto el teorema de la aplicación contractiva?

Problema 2. (a) [1] Estudiar la continuidad de la función siguiente en el punto $(1,1)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^2}{x^2-y} & \text{si } x^2\neq y,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

(b) [1.5] Estudiar la diferenciabilidad de la función siguiente en los puntos $(0,0)$ y $(0,\frac{1}{\pi})$.

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\operatorname{sen}\frac{x}{y} & \text{si } y\neq 0,\\ 0 & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Problema 3. [2] Estudiar si la función $h(x,y,z)=-x^2+y^4(1-z^2)-z$ tiene extremos.

Problema 4. [2.5] Se considera el sistema

$$\begin{cases}0=\operatorname{sen}\frac{\pi}{w},\\ 1=e^{x+u},\\ -1=2x-u+v-w,\end{cases}$$

y se pide:

(1) Comprobar que el punto $(0,0,0,1)$ es una solución del sistema, y que las variables u,v,w se pueden despejar en función de x en un entorno suyo.

(2) Sea $H(x)=(u(x),v(x),w(x))$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de 0 tal que (i) $H(0)=(0,0,1)$ y (ii) $(x,H(x))$ es solución del sistema. Calcular $dH(0)$.

Septiembre 2012

TEORÍA

T1. [2] ¿Qué es una aplicación uniformemente continua? Demostrar que toda aplicación continua en un compacto es uniformemente continua.

T2. [2] Definir los conceptos de derivada direccional, gradiente y diferencial de una función en un punto. Demostrar que si una función tiene todas sus derivadas parciales continuas en un abierto, entonces es diferenciable.

T3. [3] Definir la Hessiana de una función de clase $\mathcal{C}^2$ en un punto, y establecer mediante ella una condición suficiente para que un punto crítico sea un máximo local.

T4. [3] Explicar con detalle qué es un punto crítico condicionado y qué son los multiplicadores de Lagrange.

PROBLEMAS

Problema 1. [3] Se consideran en plano $\mathbb{R}^2$ los conjuntos

$$A : 0 < x^2 + y^2 < 1 \quad \text{y} \quad B : 0 < x^2 + y^2 < 1, x \neq 0,$$

y la función

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

definida para $(x, y) \neq (0, 0)$. Se pide:

(1) Determinar si f alcanza un máximo o un mínimo en A o en B.

(2) Estudiar si los conjuntos $f(A)$ y $f(B)$ son acotados y calcular su diámetro. ¿Son conexos?

Problema 2. (a) [1] Estudiar la continuidad en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(\tan x)(\operatorname{sen} y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(b) [1] Estudiar la diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Problema 3. [2] Estudiar, según los valores del parámetro a, los puntos críticos y los extremos de la función

$$f(x, y) = (y - ax)e^{-y} + e^{-x}.$$

Problema 4. [3] Se considera en $\mathbb{R}^4$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} u^5 + v = x \\ u^2 + v^3 = x^2. \end{cases}$$

Se pide:

(1) Mostrar que el sistema anterior define una solución $(u, v) = H(x)$ de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de $x = 0$ tal que $H(0) = (1, -1)$.

(2) Calcular la derivada en $x = 0$ de la función $f \circ H$, siendo $f(u, v) = u^3 v$.

Febrero 2013

TEORÍA

T1. [2] ¿Qué es una aplicación contractiva? Enunciar el teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas.

T2. [3] Demostrar que una aplicación uniformemente continua en un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ se extiende con continuidad a cualquier punto de su adherencia $\overline{S}$.

T3. [2] ¿Qué es un punto crítico de una función diferenciable? Explicar cómo se utiliza la hessiana para estudiar si un punto crítico es un extremo local.

T4. [3] Sea $f : A \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$ definida en un abierto de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que si su determinante jacobiano no se anula en un punto dado $a \in A$, entonces existe una bola $B(a, \varepsilon) \subset A$ en la que f es inyectiva.

PROBLEMAS

Problema 1. [3] Se consideran en plano $\mathbb{R}^2$ el conjunto S definido por las dos inecuaciones

$$(x-1)^2 + y^2 \le 1, \quad y \ge 0,$$

y la función

$$f(x,y) = x^8(1-y^8).$$

Se pide:

(1) ¿Es conexo el conjunto S? ¿Lo es su imagen?

(2) Calcular los extremos de f y la imagen $f(S)$.

(3) Deducir del teorema del valor medio una acotación en S del tipo $f(x,y) \le ax+by$ para ciertas constantes positivas $a, b \in \mathbb{R}$.

Problema 2. [2] Mostrar que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \cos(xy) & \text{para } xy \ge 0, \\ 1 + x^2y^2 & \text{para } xy < 0, \end{cases}$$

es de clase $\mathcal{C}^1$. ¿Es de clase $\mathcal{C}^2$?

Problema 3. [2] Se considera la función diferenciable $h(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Calcular sus puntos críticos y estudiar si son extremos locales.

Problema 4. [3] Se consideran en $\mathbb{R}^3$ la función diferenciable $h(x,y,z) = xyz$ y el elipsoide $M \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$. Se pide:

(1) Comprobar que M es una subvariedad regular de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$, y que es un conjunto compacto.

(2) Encontrar los puntos críticos condicionados de h en M, y obtener el máximo y el mínimo de h en M.

Septiembre 2013

TEORÍA

T1. [2] Definir (i) conjunto conexo y (ii) conjunto convexo. Demostrar que todo conjunto convexo es conexo. ¿Es cierto el recíproco?

T2. [2] ¿Qué es una aplicación uniformemente continua? Mostrar con un ejemplo que una aplicación continua puede no ser uniformemente continua.

T3. [3] Enunciar y demostrar una condición suficiente para que un punto crítico de una función de clase $\mathcal{C}^2$ sea un mínimo local.

T4. [3] Definir subvariedad regular de dimensión d de $\mathbb{R}^n$. Describir el espacio tangente a una subvariedad en un punto dado y explicar qué son los multiplicadores de Lagrange.

PROBLEMAS

Problema 1. [2] Se considera la función

$$f(x,y) = \frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$$

definida en todo el plano salvo el origen. Se pide:

(1) Definirla en el origen para que sea continua.

(2) ¿Es además de clase $\mathcal{C}^1$?

Problema 2. [2] Se considera la aplicación $f(x,y) = (x^3 + x^2 y, xy^2 + y^3)$, definida en un disco cerrado $\overline{B}$ de centro el origen y radio $\varepsilon > 0$.

(1) Acotar en $\overline{B}$ la norma de los gradientes de las componentes de f.

(2) Deducir del teorema del valor medio que si ε es suficientemente pequeño, f es contractiva en $\overline{B}$.

Problema 3. [3] Se considera la función diferenciable $h(x,y,z) = x - 2y - 3x^3 + y^2 + \cos z$.

(1) Escribir su desarrollo de Taylor de grado ≤ 4 en el punto $(1,1,0)$.

(2) Calcular sus puntos críticos y estudiar si son extremos locales.

(3) ¿Tiene h extremos globales?

Problema 4. [3] Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xe^u + yu - v^2 = 0, \\ y \operatorname{sen} u + x^2 - v^2 = 0, \end{cases}$$

y se pide:

(1) Comprobar que el sistema define implícitamente las variables u y v como funciones de x e y en un entorno del punto $(x,y,u,v) = (1,1,0,1)$.

(2) Estudiar si la aplicación resultante $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ es un difeomorfismo local en el punto $(1,1)$.

Febrero 2014

TEORÍA

T1. [3] ¿Qué es un conjunto conexo? Enunciar una condición suficiente para que una unión de conjuntos conexos sea conexa. Utilizar esa condición suficiente para demostrar que una poligonal es un conjunto conexo.

T2. [3] Definir las derivadas direccionales, las derivadas parciales y el gradiente de una función en un punto. Definir función diferenciable en un punto y su diferencial en ese punto. Explicar la relación entre la diferencial y el gradiente de una función en un punto.

T3. [4] Enunciar y demostrar el teorema de las funciones implícitas.

PROBLEMAS

Problema 1. [2] Se considera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{para } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{para } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

y se pide:

(1) Mostrar que es continua.
(2) Estudiar si f es diferenciable en el origen.

Problema 2. [3] Se considera la función diferenciable de dos variables $h(x,y) = x^2y - y^2x + x^3 - y^3$.

(1) Calcular los puntos críticos de h y la Hessiana de h en cada uno de ellos.
(2) Determinar si son extremos usando la factorización $h(x,y) = (x+y)^2(x-y)$.

Problema 3. [2] Escribir el desarrollo de Taylor de grado ≤ 2 en $y = 0$ de la función diferenciable $x = h(y)$ definida implícitamente por $2\cos^2 x - yx = 1$ en un entorno de $(\pi/4, 0)$.

Problema 4. [3] Se consideran en plano $\mathbb{R}^2$ la circunferencia unidad $C : x^2 + y^2 = 1$, la porción de disco $S : x^2 + y^2 \leq 1, x > 0, y > 0$ y la función $h(x,y) = xy^2$. Se pide:

(1) Mostrar que h no tiene puntos críticos en el interior de S.
(2) Obtener los puntos críticos condicionados de h en C.
(3) Mostrar que $h(S)$ es un conjunto conexo y calcularlo.

Septiembre 2014

TEORÍA

T1. [2,5] (a) Definir el concepto de *aplicación contractiva*. Enunciar el *Teorema del punto fijo para aplicaciones contractivas.*

(b) Se considera la aplicación $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = \frac{1}{8}(x^2+y^2, y^6)$, y se denota $S \subset \mathbb{R}^2$ el cuadrado abierto dado por $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. Se pide:

(1) Mostrar que $f(S) \subset S$, de modo que $f : S \to S$ está bien definida.

(2) Acotar en S la norma de los gradientes de las componentes de f.

(3) Aplicar el teorema del valor medio a las componentes de f y las acotaciones de (2) para probar que f es contractiva en S.

(4) Probar que $f : S \to S$ no tiene puntos fijos en S. ¿Contradice esto el teorema de la aplicación contractiva?

T2. [1,5] Enunciar y demostrar el *Teorema de Bolzano-Weiertrass.*

PROBLEMAS

Problema 1. [2] Sea

$$g(t) = \begin{cases} t^2 \operatorname{sen} \frac{1}{t} & \text{si } t \neq 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \end{cases}$$

y se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = g(x) + g(y)$. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de f. ¿Son continuas las funciones $D_1 f = \partial f/\partial x$ y $D_2 f = \partial f/\partial y$?

Problema 2. [1,5] Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (xe^y, xe^{-y})$. ¿Es f localmente invertible?, ¿y globalmente? Determina el mayor subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$ donde f sea inyectiva.

Problema 3. [2,5] Consideremos las funciones

$$f(x, y) = x^2 y \quad \text{y} \quad g(x, y) = x^3 y + \log x + \log y,$$

definidas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ respectivamente. Se pide:

(1) Determinar los posibles extremos de f sobre el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ : \ g(x, y) = 0\}$.

(2) Demostrar que la ecuación $g(x, y) = 0$ define y como función $y(x)$ en un entorno de cada punto (a, b) que verifique dicha ecuación.

(3) Determinar (a, b) para que la función $F(x) = f(x, y(x))$, definida en un entorno de a, tenga un máximo local en a. ¿Cómo interviene aquí el apartado (1)?

Febrero 2015

TEORÍA

T1. (1) Enunciar el teorema de Bolzano-Weierstrass.

(2) Deducir del teorema enunciado que la imagen continua de un compacto es compacta.

T2. (1) Enunciar el teorema del valor medio.

(2) Deducir del teorema anterior que si una función diferenciable $f : U \to \mathbb{R}$ definida en un abierto convexo $U \subset \mathbb{R}^n$ tiene todas sus derivadas parciales acotadas es Lipschitziana y uniformemente continua.

T3. (1) ¿Qué es un punto crítico de una función diferenciable? Demostrar que un extremo local de una función diferenciable es necesariamente un punto crítico.

(2) Demostrar que si una función continua $f : K \to \mathbb{R}$ en un compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ es diferenciable en su interior y se anula en su frontera, entonces tiene algún punto crítico en su interior.

T4. (1) Definir difeomorfismo local y demostrar que el determinante jacobiano de un difeomorfismo local es no nulo.

(2) Enunciar el teorema de inversión local y hacer un esquema de su demostración.

PROBLEMAS

Problema 1. Se fija un número natural $m \geq 1$ y se considera la función

$$f(x,y) = (x+y)^m \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$$

definida en todo el plano salvo el origen. Se pide:

(1) Definirla en el origen para que sea continua.

(2) Estudiar para qué valores de m la función es diferenciable.

Problema 2. Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^3 + xy + y^3$, así como el gradiente $g = \nabla f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(1) Calcular los puntos críticos de f.

(2) Mostrar que $g = \nabla f$ es un difeomorfismo local en cada punto crítico anterior. Estudiar si son extremos.

(3) Escribir el polinomio de Taylor de grado 2 de f en uno de esos puntos críticos.

(4) Calcular la diferencial $dg^{-1}(g(p))$ para cada punto crítico p de f.

Problema 3. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ la función diferenciable $h(x,y,z) = x^2 - y^2 + \frac{1}{4}z$ y la cuádrica $Q \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $z^2 - 1 = x^2 + 4y^2$. Se pide:

(1) Comprobar que Q es una superficie regular.

(2) Calcular el plano tangente T_pQ a Q en un punto arbitrario $p \in Q$. ¿Es tangente a Q la recta que une p con el origen?

(3) Encontrar los puntos críticos condicionados de h en Q.

(4) Estudiar si esos puntos son extremos locales de h en Q calculando las hessianas pertinentes.

Septiembre 2015

TEORÍA

T1. (1) Demostrar que la imagen continua de un conjunto conexo es conexa.
(2) ¿Es convexa la imagen continua de un conjunto convexo?

T2. (1) Definir las derivadas direccionales, el gradiente y la diferencial de una función en un punto.
(2) Poner un ejemplo de una aplicación que no sea diferenciable pero tenga derivadas direccionales.

T3. (1) Enunciar con matrices jacobianas la regla de la cadena.
(2) Sea f una función diferenciable de dos variables y sea $h(x,y,z) = f(x^2 - y, \log(z - y^2))$. Calcular los puntos críticos de h.

PROBLEMAS

Problema 1. Se considera la función

$$f(x,y) = \frac{x^4 \operatorname{sen}^2 y}{xy^2 - y^3},$$

definida para $xy^2 - y^3 \neq 0$. Se pide:
(1) Calcular su límite para $(x,y) \to (a,0)$ con $a \neq 0$.
(2) Mostrar que no tiene límite para $(x,y) \to (a,a)$.

Problema 2. (1) Estudiar la diferenciabilidad de la función

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \to \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{x^k}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0), \end{cases}$$

según los valores del entero $k \geq 3$.
(2) ¿Cuándo es de clase 1?

Problema 3. Se considera en $\mathbb{R}^3$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x^2 + y^4 = 1, \\ y^4 - z = 1, \end{cases}$$

y la función $h(x,y,z) = -x^2 + y^4(1 - z^2) - z$. Se pide:
(1) Estudiar si h tiene extremos locales.
(2) Mostrar que el sistema define una curva regular compacta $C \subset \mathbb{R}^3$, cuyos puntos son todos regulares.
(3) Encontrar los puntos críticos condicionados de h en C.
(4) Estudiar los extremos condicionados de h en C.

Febrero 2016

TEORÍA

T1. Se considera el siguiente conjunto:

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(x,y) : x^2+y^2 = \tfrac{1}{n^2}\right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(1) Calcular el interior, la adherencia y la frontera de S. ¿Tiene S algún punto aislado?
(2) ¿Es S conexo? ¿Es conexo $S \cup \big(\{0\}\times[0,1]\big)$?

T2. (1) Definir el concepto de aplicación contractiva y enunciar el Teorema del Punto Fijo para aplicaciones contractivas.

(2) Sea $K\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto compacto y $f : K \to K$ una aplicación continua sin puntos fijos. Probar que existe una constante $C > 0$ tal que para cada $x \in K$ se tiene $\|x - f(x)\| \geq C$.

T3. (1) Enunciar el concepto de diferencial de una función en un punto.
(2) Enunciar y demostrar el Teorema del Valor Medio.

T4. Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una aplicación de clase $\mathcal{C}^1$, y supongamos que para un punto $x_0 \in U$ se verifica $\det(Jf(x_0)) \neq 0$. Probar que existe $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset U$ y f es inyectiva en $B(x_0, r)$.

PROBLEMAS

Problema 1. Para $k = 1, 2$ se define la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^k \operatorname{sen}\frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0,\\ 0 & \text{si } y = 0.\end{cases}$$

Estudiar en todo $\mathbb{R}^2$ según el valor de k.
(1) la continuidad y
(2) la diferenciabilidad de f.

Problema 2. Se considera en $\mathbb{R}^3$ la ecuación

$$x + 2z + \tfrac{1}{2}x^2 + yz + (z-1)^{13} = 2.$$

(1) Probar que en un entorno de $(0, 0, 1)$ la ecuación anterior define a z como función implícita de x e y, que denotamos $z = g(x, y)$, y calcular el polinomio de Taylor de segundo grado de g en $(0, 0)$.

(2) Sea G la aplicación definida por

$$G(x,y) = (g(x,y), y).$$

Determinar si G posee inversa diferenciable en un entorno de $(0, 0)$, y en caso afirmativo, calcular la diferencial de esa inversa en $G(0, 0)$.

Problema 3. Se considera la curva $C \subset \mathbb{R}^3$ de ecuaciones $x + y + z = 3,\ x^2 - y^2 + z^2 = 1$.
(1) Calcular los puntos críticos condicionados de la función $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en C.
(2) Hallar la recta tangente a C en su punto más próximo al origen.

Septiembre 2016

TEORÍA

T1. (1) ¿Qué es una aplicación uniformemente continua? Mostrar con un ejemplo que una aplicación continua puede no ser uniformemente continua.

(2) Demostrar que una función continua en un conjunto compacto es uniformemente continua.

T2. (1) Definir el concepto de derivada parcial de una función en un punto.

(2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales acotadas en un entorno abierto de un punto a. Probar que f es continua en a.

T3. (1) Enunciar el lema de Schwarz.

(2) Enunciar el Teorema de Taylor para funciones de clase $k+1$ ($k \geq 0$).

T4. (1) Enunciar los conceptos de punto crítico y de extremo local y demostrar la relación que hay entre ellos.

(2) Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto con interior no vacío y $f : K \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que si f es constante en la frontera de K y diferenciable en su interior, entonces tiene algún punto crítico en el interior.

PROBLEMAS

Problema 1. Sea $A = \{(x, rx) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{Q}\}$ y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$.

(1) ¿Es A conexo?, ¿y compacto?

(2) Consideremos ahora $f(A)$, ¿es conexo?, ¿ es compacto?

Problema 2. Se considera la función siguiente, definida en el plano $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^x + \log y & \text{para } y \geq e^x, \\ x + y & \text{para } y < e^x. \end{cases}$$

(1) Estudiar la continuidad de f.

(2) Estudiar la diferenciabilidad de f.

Problema 3. Sea $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por:

$$F(x,y,z,u,v) = (u + v + x^2 - y^2 + z^2, u^2 + v^2 + u - 2xyz).$$

Se pide:

(1) Demostrar que la ecuación $F(x,y,z,u,v) = (2,11)$ define implícitamente a u, v en función de x, y, z en un entorno de $(1,0,0,-2,3)$.

(2) Hallar la diferencial de la función implícita anterior en $(1,0,0)$.

Problema 4.

(1) Calcular los extremos de la función $h(x,y,z) = xyz$ en el triángulo cerrado

$$x + y + z = 27, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

(2) Mostrar que si la suma de tres números enteros no negativos es 27, su producto es ≤ 729.