

Équations aux dérivées partielles/Partial Differential Equations

Propriétés de compacité de l'opérateur de Green généralisé pour l'équation des milieux poreux

Jesus Ildefonso DIAZ et Ioan I. VRABIE

Résumé — On montre que l'opérateur $f \mapsto u$, avec u solution de l'équation de diffusion non linéaire $u_t - \Delta \varphi(u) = f$ sur $(0, T) \times \Omega$ associée aux conditions de bord parabolique $\varphi(u) = 0$ sur $(0, T) \times \partial\Omega$ et $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$ sur Ω ($u_0 \in L^1(\Omega)$) satisfait certaines propriétés de compacité sous l'hypothèse générale: φ est une fonction réelle continue, strictement croissante, nulle à l'origine.

Compactness properties of the generalized Green operator associated to the porous media equation

Abstract — We show some compactness properties of the operator $f \mapsto u$, where u is the solution of the nonlinear diffusion equation $u_t - \Delta \varphi(u) = f$ on $(0, T) \times \Omega$ associated to the parabolic boundary conditions $\varphi(u) = 0$ on $(0, T) \times \partial\Omega$ and $u(0, \cdot) = u_0(\cdot)$ on Ω , u_0 a given function in $L^1(\Omega)$. Our results are carried out under the general assumption: φ is a real continuous strictly increasing function such that $\varphi(0) = 0$.

1. INTRODUCTION. — Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné régulier, $T > 0$ et φ une fonction réelle continue non décroissante avec $\varphi(0) = 0$. Le but de cette Note est d'obtenir quelques propriétés de compacité de l'opérateur de Green généralisé $f \mapsto u$ où u est la solution de l'équation (dite des milieux poreux):

$$(1) \quad \begin{cases} u_t - \Delta \varphi(u) = f & \text{sur } (0, T) \times \Omega \\ \varphi(u) = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

et u_0 est une fonction donnée dans $L^1(\Omega)$. Ce type de propriétés a plusieurs conséquences intéressantes et, en particulier, permet d'obtenir des résultats d'existence pour des systèmes couplés d'équations paraboliques faisant intervenir des opérateurs de la forme $-\Delta \varphi_i(\cdot)$, $i = 1, \dots, n$ [7]. Quelques propriétés de compacité de cet opérateur de Green ont été obtenues dans [2] et [8] en supposant la compacité du semi-groupe $S(t)$ de $L^1(\Omega)$ associé à l'opérateur $-\Delta \varphi(\cdot)$. Si $\varphi(r) = |r|^{m-1}r$, il a été montré dans [2] (et après, étendu dans [1] et [4] à d'autres classes de fonctions φ plus générales) que $S(t)$ est compact si on a

$$(2) \quad m > \max \{ (N-2)/N, 0 \}.$$

Dans [6] il a été précisé que, si $0 < m < N/(N-2)$, $S(t)$ n'est pas compact de $L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ bien que $S(t)$ soit compact de $L^p(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$ pour tout $1 < p \leq +\infty$, et donc, dans le cas concret $\varphi(r) = |r|^{m-1}r$, le résultat mentionné ci-dessus est optimal.

Notre but est d'obtenir la compacité de l'opérateur de Green généralisé, de $L^1([0, T] \times \Omega)$ «faible» dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$ «fort», pour une classe générale de fonctions φ pour lesquelles $S(t)$ n'est pas compact de $L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$.

2. LES RÉSULTATS. — Soit M un ensemble mesurable borné dans \mathbb{R}^p ($p \geq 1$). On sait qu'un sous-ensemble F de $L^1(M)$ est relativement faiblement compact si et seulement si on a

$$(3) \quad \lim_{K \rightarrow +\infty} \chi_{\{ |f| \leq K \}} = f \quad \text{dans } L^1(M) \text{ uniformément pour } f \in F.$$

Note présentée par Haïm BREZIS.

Soit $A : D(A) \subset L^1(\Omega) \rightarrow L^1(\Omega)$ la réalisation de l'opérateur $-\Delta\varphi(\cdot)$ dans $L^1(\Omega)$. Plus précisément, on définit $D(A) = \{u \in L^1(\Omega) : \varphi(u) \in W_0^{1,1}(\Omega), \Delta\varphi(u) \in L^1(\Omega)\}$ et $Au = -\Delta\varphi(u)$ si $u \in D(A)$.

On sait [3] que A est m -accréatif et donc le semi-groupe engendré $S(t)$ est une contraction. Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1. — Soient $u_0 \in L^1(\Omega)$ et φ telle que
(H $_{\varphi}$) φ est strictement croissante.

Soit F une partie faiblement compacte de $L^1((0, T) \times \Omega)$. Alors l'ensemble $\{u_f; f \in F\}$ est relativement compact dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$ où u_f représente la solution de (1).

Une étape essentielle de la démonstration du théorème est le

THÉORÈME 2. — Sous l'hypothèse (H $_{\varphi}$), le semi-groupe $S(t)$ associée à la réalisation de l'opérateur $-\Delta\varphi(\cdot)$ dans $L^1(\Omega)$ applique toute partie faiblement compacte de $L^1(\Omega)$ dans une partie relativement compacte de $L^1(\Omega)$. En particulier, $S(t)$ est compact de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$ si $1 \leq q < p \leq +\infty$.

Une conséquence intéressante du théorème 2 est le

THÉORÈME 3. — Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante avec $\varphi(0) = 0$. Alors, pour tout $u_0 \in L^1(\Omega)$ et tout $f \in L^1(\mathbb{R}_+; L^1(\Omega))$ la solution u de (1) vérifie

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0 \quad \text{dans } L^1(\Omega)$$

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2. — Soit B une partie relativement faiblement compacte de $L^1(\Omega)$. Puisque $S(t)$ est une contraction de $L^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, en vertu de (3), il suffit de se ramener au cas où B est borné dans $L^\infty(\Omega)$.

On rappelle d'abord que

$$(5) \quad \|\nabla\varphi(S(t)u_0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{t} \|j(u_0)\|_{L^1(\Omega)}$$

pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, où $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$j(r) = \int_0^r \varphi(\Theta) d\Theta, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}.$$

A partir de (5) il est facile de voir que $\{\varphi(S(t)u_0); u_0 \in B\}$ est borné dans $H_0^1(\Omega)$ et donc relativement compact dans $L^1(\Omega)$, si B est borné dans $L^\infty(\Omega)$. Puisque φ est strictement croissante et que $\|S(t)u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$ pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, la conclusion est une conséquence immédiate du théorème de Lebesgue.

4. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. — Puisque $(u_0, f) \mapsto u$, u solution de (1), est une contraction de $L^1(\Omega) \times L^1((0, T) \times \Omega)$ dans $C([0, T]; L^1(\Omega))$ en vertu de (3), il suffit de se ramener au cas $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et F borné dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$.

On sait (cf. par exemple [8], lemma 2.3.1) que

$$(6) \quad \|u_f(t+\lambda) - S(\lambda)u_f(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_t^{t+\lambda} \|f(s)\|_{L^1(\Omega)} ds \leq \lambda |\Omega| \|f\|_{L^\infty((0, T) \times \Omega)}$$

pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^\infty((0, T) \times \Omega)$, $t \geq 0$ et $\lambda \geq 0$. D'autre part (cf. [3])

$$(7) \quad \|u_f(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^t \|f(s)\|_{L^\infty(\Omega)} ds$$

pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^1(0, T; L^\infty(\Omega))$ et $t \geq 0$.

Mais (7) et le théorème 2 nous assurent que pour tout $t \in [0, T]$ et $\lambda > 0$, l'ensemble $\{S(\lambda)u_f(t); f \in F\}$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$. En faisant $\lambda \downarrow 0$ dans (6) on peut conclure aisément que pour tout $t \in (0, T]$ l'ensemble $\{u_f(t); f \in F\}$ est relativement compact dans $L^1(\Omega)$.

Maintenant, la conclusion est une conséquence du théorème de Ascoli-Arzelà (voir aussi le théorème 2.3.1 de [8]).

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3. — Comme dans la démonstration précédente, on peut se ramener toujours au cas $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^+; L^\infty(\Omega))$. On considère d'abord le cas $f=0$. A partir de (5) on obtient successivement

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(S(t)u_0) = 0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega).$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(S(t)u_0) = 0 \quad \text{p. p. } t \text{ dans } \Omega.$$

Puisque φ est strictement croissante il en résulte que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)u_0 = 0 \quad \text{p. p. } t \text{ dans } \Omega$$

Enfin, (7) et le théorème de Lebesgue nous permettent de conclure que

$$(8) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t)u_0 = 0 \quad \text{dans } L^p(\Omega) \text{ pour tout } p \in [1, +\infty).$$

On passe maintenant au cas $f \in L^1(\mathbb{R}^+; L^\infty(\Omega))$, $f \neq 0$.

D'après (7) et le théorème 2 on sait que l'ensemble

$$K = \{S(1)u(t); t \geq 1\}$$

est relativement compact dans $L^1(\Omega)$.

Mais

$$\|u(2t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u(2t) - S(t)u(t)\|_{L^1(\Omega)} + \|S(t-1)S(1)u(t)\|_{L^1(\Omega)}$$

pour tout $t \geq 1$, et alors

$$\|u(2t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_t^{2t} \|f(s)\|_{L^1(\Omega)} ds + \sup_{v \in K} \|S(t-1)v\|_{L^1(\Omega)}$$

Puisque $f \in L^1(\mathbb{R}^+; L^\infty(\Omega))$ et que K est relativement compact dans $L^1(\Omega)$, la démonstration de (4) s'ensuit par (8).

Les auteurs remercient Ph. Benilan pour ses suggestions qui ont permis de simplifier quelques démonstrations.

Note remise le 28 avril 1989, acceptée le 2 mai 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. BADI, J. I. DIAZ et A. TESEI, *Rend. Sem. Math. Univ. Padova*, 78, 1987, p. 109-124.
- [2] P. BARAS, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 289, série A, 1979, p. 1113-1116.
- [3] Ph. BENILAN, *Thèse*, Orsay, 1972.
- [4] Ph. BENILAN et J. BERGER, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 300, série I, 1985, p. 573-576.
- [5] H. BREZIS, *Analysis of nonlinear problems*, R.I.M.S., 1974, p. 2-27.
- [6] H. BREZIS et A. FRIEDMAN, *J. Math. Pures Appl.*, 62, 1983, p. 73-97.
- [7] J. I. DIAZ et I. I. VRABIE, *Existence for reaction diffusion systems* (à paraître).
- [8] I. I. VRABIE, *Compactness methods for nonlinear evolutions*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 32, Longman Scientific & Technical, 1987.

J. I. D.: *Departamento de Matematica Aplicada, Univ. Complutense de Madrid, 28040 Madrid, Espagne;*

I. I. V.: *Département des Mathématiques, Institut polytechnique de Iasi, 6600, République Socialiste de Roumanie.*