

УДК 532.540.013:517.946

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

© С.Н. АНТОНЦЕВ, Х.И. ДИАС, А.В. ДОМАНСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ
ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЗАДАЧ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

(Представлено академиком П.Л. Кочинной 28 IV 1992)

Фильтрация двух несмешивающихся жидкостей в неоднородной анизотропной пористой среде описывается системой дифференциальных уравнений, состоящей из вырождающегося параболического для насыщенности $s(x, t)$ и эллиптического для "приведенного" давления $p(x, t)$ уравнения. Система имеет вид [1]

$$(1) \quad \frac{\partial (m(x))}{\partial t} = \operatorname{div}(K_0(x) a(x) \nabla s + K_1(x, s) \nabla p + f_0(x, s)),$$

$$(2) \quad 0 = \operatorname{div}(K(x, s) \nabla p + f(x, s)),$$

где Ω — ограниченная, вообще говоря, многосвязная область с границей Γ . Коэффициенты K_0 , $K_1 = K_0 k_{0i}(s)$, $i = 1, 2$, $K = K_1 + K_2$, f, f_0, a, m — заданные, соответственно тензорные, векторные и скалярные функции указанных аргументов. Здесь и далее оператор ∇ действует только на независимые переменные x_i , $i = 1, 2, 3$.

Для системы (1), (2) рассматривается следующая начально-краевая задача:

$$(3) \quad s(x, t) = s_0(x, t), p(x, t) = p_0(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_1 T = \Gamma_1 \times (0, T),$$

$$(4) \quad (K \nabla p + f) n = -Q(x, t), \quad (K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + f) n = -Q_1(x, t),$$

$$(x, t) \in \Gamma_2 T = \Gamma_2 \times (0, T),$$

$$(5) \quad s(x, 0) = s_0(x, 0), \quad x \in \Omega.$$

Здесь $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$; n — нормаль к Γ , каждая Γ_i , $i = 1, 2$, может состоять из нескольких достаточно гладких несвязных компонент; p_0, s_0, Q, Q_1 — заданные функции.

В работе [1] доказано существование "в целом" по времени обобщенных решений s, p как в регулярной ($0 < \delta_0 \leq s(x, t) \leq 1 - \delta_1 < 1$, $0 < \delta(\delta_0, \delta_1) \leq a(s)$), так и в вырождающейся ($0 \leq s \leq 1, a \geq 0$) задаче. Для регулярных задач в [1] доказаны устойчивость решений относительно начальных и граничных данных, а также их стабилизация при $t \rightarrow \infty$.

Единственность обобщенных решений вырождающейся задачи (1)–(5) доказана в [2], а при $\Gamma = \Gamma_1$ — в [3].

В [4, 5] для решений системы (1), (2) установлены конечное время стабилизации и конечная скорость распространения возмущений от начальных данных ($s_0 \equiv \equiv 0$ или $s_0 \equiv 1$).

В данной работе с использованием методики [2] для вырождающейся задачи доказана устойчивость решения относительно коэффициентов, начальных и граничных данных, а также сходимость его к стационарному решению при $t \rightarrow \infty$.

1. Устойчивость обобщенных решений. В [1] доказано су-

ществование обобщенного решения задачи (1)–(5) в следующем смысле:

$s(x, t), p(x, t)$ — ограниченные измеримые функции,

$0 \leq s(x, t) \leq 1, p(x, t) \in L_\infty(\Omega_T) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)),$

$u(x, t) \equiv \int_0^{s(x,t)} \sqrt{a(\xi)} d\xi \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)),$

удовлетворяющие (3) в смысле следов из $W_2^1(\Omega);$

для всех $(\varphi(x, t), \psi(x, t)) \in W_2^1(\Omega_T),$

$\varphi(x, t) = \psi(x, t) = 0, (x, t) \in \Gamma_{1T}, \varphi(x, T) = 0, x \in \Omega,$

и почти всех $t \in (0, T)$ выполнены интегральные тождества

$$(6) \quad (ms, \varphi)_{\Omega_T} - ((K_0 a \nabla s + K_1 \nabla p + f_0), \nabla \varphi)_{\Omega_T} - (ms(x, \tau), \varphi)_{\Omega} \Big|_{\tau=0}^{\tau=T} - (Q_1, \varphi)_{\Gamma_{2T}} =$$

$$(7) \quad (K \nabla p + f, \nabla \psi)_{\Omega} + (Q, \psi)_{\Gamma_T} = 0.$$

Здесь

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} uv dx, \quad \Omega_T = \Omega \times (0, T), \quad \Gamma_{2T} = \Gamma_2 \times (0, T).$$

Отметим, что в [1] указаны также условия, при которых $p(x, t)$ обладает дополнительным свойством $|\nabla p| \leq M < \infty.$

Далее будут рассматриваться лишь обобщенные решения задачи (1)–(3) соответствующие заданным функциям

$$\mathfrak{M} \equiv (a^i, m^i, s_0^i, p_0^i, f^i, f_0^i, K^i, K_0^i, K_1^i, Q^i, Q_1^i), \quad i = 1, 2.$$

Будем предполагать, что функции a^i удовлетворяют одному из следующих условий:

$$(8) \quad \left| \int_0^{s_2} (a^1 - a^2) d\xi \right|^q \leq M \int_0^1 a^1 (\tau s^2 + (1-\tau) s^1) d\tau, \quad \forall (s^1, s^2) \in [0, 1],$$

$$s_0^i(x, t) = \int_0^{s_0^i(x,t)} a^i(\xi) d\xi = \int_0^{s_0^i(x,t)} a^2(\xi) d\xi, \quad (x, t) \in \Gamma_{1T}, \quad q \in (0, 2),$$

или

$$(8') \quad a^1(s) \leq M a^2(s) \quad \forall s \in [0, 1],$$

$$s_0^i(x, t) = s_0^2(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_{1T}.$$

Первые условия в (8), (8') аналогичны используемым в [6].

Теорема 1. Пусть выполнено условие (8) или (8') и дополнительно

$$M^{-1} \leq (m^1, (K_1^1, f^1, f_0^1)) \leq M, \quad \forall \xi \in R^3, \quad |\xi|^2 = (\xi, \xi) = 1,$$

$$(9) \quad |f^1, f_0^1, \frac{\partial}{\partial s} (K_1^1, f^1, f_0^1) / \sqrt{a^1}| \leq M,$$

$$0 \leq a^i \in C[0, 1], \quad K_0^i(x) \in C^1(\Omega), \quad \text{mes } \Gamma_1 > 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда для обобщенных решений $\omega^i = (s^i, p^i)$, таких, что $|\Delta p^i| \leq M$, справедлива оценка

$$(10) \quad (s, \int_{s^1}^{s^2} a^1(\xi) d\xi)_{\Omega_T} + \|p\|_{2, \Omega_T}^2 \leq C(M, T)H,$$

где $s = s^1 - s^2, p = p^1 - p^2,$

$$H \equiv \|m^1 - m^2\|_{2, \Omega} + \|s_0^1 - s_0^2\|_{2, \Gamma_{1T}} + \|s_0^1 - s_0^2\|_{2, \Omega} + \|p_0^1 - p_0^2\|_{2, \Gamma_{1T}} +$$

$$+ \|Q^1 - Q^2\|_{2, \Gamma_{2T}} + \|Q_1^1 - Q_1^2\|_{\Gamma_{2T}} + \|f^1 - f^2\|_{\infty, Y} + \|f_0^1 - f_0^2\|_{\infty, Y} +$$

$$+ \|K^1 - K^2\|_{\infty, Y} + \|K_1^1 - K_1^2\|_{\infty, Y} + \|K_0^1 - K_0^2\|_{\infty, \Omega} + (\|a^1 - a^2\|_{C[0,1]})^{1-q}$$

$$Y = (0, 1) \times \Omega \quad \text{и } q = 1 \text{ в случае условия (8')}.$$

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью метода сопряженной задачи для системы уравнений, примененного в [2] при доказательстве теоремы единственности.

Используя интегральные тождества (6), (7), справедливые для каждого из решений (s^i, p^i) , после ряда преобразований получаем равенство

$$(11) \quad (m^1 s, L_1(\varphi, \psi))_{\Omega_T} + (p, L_2(\varphi, \psi))_{\Omega_T} = -\epsilon (m^1 s, \operatorname{div}(K_0^1 \nabla \varphi))_{\Omega_T} + E(\varphi, \psi, \mathfrak{R}^1 - \mathfrak{R}^2).$$

Здесь

$$(12) \quad L_1(\varphi, \psi) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial t} + A^\epsilon \operatorname{div}(K_0^1 \nabla \varphi) + A_1(x, t) \nabla \varphi + C_1(x, t) \psi,$$

$$(13) \quad L_2(\varphi, \psi) \equiv \operatorname{div}(B(x, t) \nabla \psi - D(x, t) \nabla \varphi),$$

$$(14) \quad A^\epsilon \equiv A_0 + \epsilon, \quad A_0 = (C'(s^1) - C^1(s^2))/m^1(s^1 - s^2), \quad C^i(s) = \int_0^s a_i(\xi) d\xi, \\ -A_1 = (\nabla p^1(K_1^1(x, s^1) - K_1^1(x, s^2)) + f_0^1(x, s^1) - f_0^1(x, s^2))/m^1(s^1 - s^2), \\ -C_1 = (\nabla p^1(K^1(x, s^1) - K^1(x, s^2)) + f_1^1(x, s^1) - f_1^1(x, s^2))/m^1(s^1 - s^2), \\ B = K^1(x, s^2), \quad D = K_1^1(x, s^2),$$

а функция E определяется разностью данных задач (1)–(5) $\mathfrak{R}^1 - \mathfrak{R}^2$.

Затем рассматривается начально-краевая задача

$$(15) \quad L_1(\varphi, \psi) = h_1, \quad L_2(\varphi, \psi) = h_2,$$

$$(16) \quad \varphi|_{\Gamma_1 T} = \psi|_{\Gamma_1 T} = K_0^1 \Delta \varphi \cdot n|_{\Gamma_2 T} K_0^1 \nabla \psi \cdot n|_{\Gamma_2 T} = \varphi|_{t=T} = 0$$

со специально выбранными функциями $h_i = h_i(s, p)$: Доказывается разрешимость задачи (15), (16) для всех $\epsilon > 0$ и в (11) делается предельный переход при $\epsilon \rightarrow 0$. Оценки слагаемых в левой части (11) снизу, а в правой сверху завершают доказательство.

З а м е ч а н и е 1. В численных расчетах задачи (1)–(5) обычно сначала решают регуляризованное уравнение (1), в котором заменяется на $a^\epsilon = a + \epsilon$, $\epsilon > 0$. Согласно теореме 1 для разности $s - s^\epsilon$, $p - p^\epsilon$ между решениями точной и регуляризованной задачи справедлива оценка

$$(17) \quad ((s - s^\epsilon) \int_0^s a(\xi) d\xi)_{\Omega_T} + \|p - p^\epsilon\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C\sqrt{\epsilon}.$$

Изучим теперь устойчивость решения в $\|\cdot\|_{\Omega}$ относительно изменения только начальных данных $s_0(x)$.

Отметим, что сложная структура вырождающейся сопряженной системы (12), (13) не позволяет применить здесь известные для одного вырождающегося параболического уравнения методы исследования устойчивости решения в $\|\cdot\|_{1, \Omega}$.

Пусть далее Δ обозначает оператор Лапласа и $g_k(x)$, $\lambda_k \geq 0$, $k = 1; 2, \dots$, решения задачи

$$(18) \quad (\Delta + \lambda_k)g_k = 0, \quad x \in \Omega, \quad (g_i, g_k) = \delta_{ik}, \\ g_k|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial g_k}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0.$$

Известно, что $g_k(x)$ образуют полную систему, и для $\forall v(x) \in L_2(\Omega)$ имеем

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k v_k, \quad v_k = (v, g_k)_{\Omega}, \quad \|v\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2}{\lambda_k} \equiv -(v, \Delta^{-1}v)_{\Omega}.$$

Здесь Δ^{-1} обозначает обратный к Δ оператор при условиях (18). В частности, при $\Gamma = \Gamma_1$ имеем обычное определение:

$$\|v\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 = \sup_{g \in \dot{W}_1^1(\Omega)} (v, g)_\Omega / \|g\|_{\dot{W}_1^1(\Omega)}.$$

Теорема 2. Пусть $\omega^i = (s^i, p^i)$, $i = 1, 2$, — обобщенные решения задач (1) — (5), различающиеся только начальными данными $s_0^i(x)$; выполнены условия теоремы 1, $m = 1$, $K_0^{ij} = \delta^{ij} K_0$.

Тогда справедлива оценка

$$\|s^1(x, t) - s^2(x, t)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|p^1 - p^2\|_{2, \Omega_T} \leq C \|s_0^1(x) - s_0^2(x)\|_{H^{-1}(\Omega)} \\ \forall t \leq T; \quad C = C(M, T).$$

Доказательство использует равенство

$$(s(x, \tau), \varphi(x, \tau))_\Omega \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + (S, L_1(\varphi, \psi))_{\Omega_T} + (p, L_2(\varphi, \psi))_{\Omega_T} = -\epsilon (s, \operatorname{div}(K_0 \nabla \varphi))_{\Omega_T}.$$

При этом в сопряженной задаче (15), (16) полагаем

$$h_1 = 0, \quad h_2 = p, \quad \varphi(x, t) = \Delta^{-1} S(x, t),$$

где оператор Δ^{-1} определяется задачей (18).

2. Стабилизация обобщенных решений. Рассмотрим теперь стационарное решение соответствующей задачи (1) — (5). Это решение $\omega_0 = (s_0(x), p_0(x))$, $0 \leq s_0 \leq 1$, удовлетворяет интегральным тождествам

$$(19) \quad -(K_0 a(s_0) \nabla s_0 + K_1(x, s_0) \nabla p_0 + f_0(x, s_0), \nabla \varphi)_\Omega - (R_1, \varphi)_{\Gamma_1} = 0,$$

$$(20) \quad (K(x, s_0) \nabla p_0 + f(x, s_0), \nabla \psi)_\Omega + (R, \psi)_{\Gamma_2} = 0$$

и условиям

$$(21) \quad S_0(x) = 1, \quad x \in \Omega, \quad p_0(x) = p^0(x), \quad x \in \Gamma_1.$$

Здесь $R_1(x)$, $R(x)$ аналоги $Q_1(x, t)$, $Q(x, t)$ для стационарного случая. При $R_1 = R$ задача (19) — (21) допускает решение $s_0(x)$, $p_0(x)$, в котором

$$(22) \quad S_0(x) \equiv 1, \quad x \in \Omega,$$

а $p_0(x)$ удовлетворяет задаче

$$(23) \quad \operatorname{div}(K(x, 1) \nabla p_0 + f(x, 1)) = 0,$$

$$(24) \quad (K \nabla p_0 + f) h = -R, \quad x \in \Gamma_2,$$

$$(25) \quad p_0 = p^0(x), \quad x \in \Gamma_1.$$

При этом учитываются следующие свойства коэффициентов системы (1), (2) (см. [4, стр. 212]):

$$(26) \quad K(x, 1) = K_1(x, 1), \quad f(x, 1) = f_0(x, 1).$$

З а м е ч а н и е 2. Решение (22) — (25) соответствует физическому случаю полного вытеснения нефти, первоначально занимающей объем Ω , водой.

Будем предполагать выполненными следующие условия:

$$(27) \quad \int_{s^0(x, t)}^1 a(\xi) d\xi \in L_1(\Gamma_1 \times (0, \infty)),$$

$$(Q_1 - R_1, Q - R) \in L_1(\Gamma_2 \times (0, \infty)), \quad R_1 = R,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q - R\|_{1, \Gamma_2} = 0, \quad |f'_{0s}, f'_s, K_{1s}|/a \leq M,$$

$$|\nabla p| \leq M, \quad s(x, t) \in C^{\alpha, \alpha/2}(\Omega_T), \quad k_{0i}(s) \in C^{1+\alpha}[0, 1], \quad i = 1, 2,$$

$$K_0(x) \in C^{1+\alpha}(\Omega), \quad (f, f_0) \in C^\alpha(\Omega) \times C^{1+\alpha}[0, 1], \quad 0 < \alpha < 1,$$

и существуют функции $\varphi(\tau)$, $g(\tau)$ такие, что

$$(28) \quad (g(\tau)/\tau)' > 0, \quad \tau > 0, \quad \int_{\tau}^1 \frac{d\xi}{g(\xi)} \rightarrow \infty, \quad \tau \rightarrow 0,$$

$$\varphi''(\tau) > 0, \quad \tau > 0, \quad \int_s^1 a(\xi) d\xi \geq \varphi(1-s), \quad \tau\varphi(y/\tau) \geq g(y), \quad 0 \leq \tau < \infty.$$

Теорема 3. Пусть $\omega = (s(x, t), p(x, t))$, $\omega_0 = (s_0(x), p_0(x))$ — обобщенные решения соответствующих задач (1)–(5), (22)–(25) и выполнены условия (27), (28).

Тогда

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} (\|1-s\|_{1,\Omega} + \|p-p_0\|_{W_2^1(\Omega)}) = 0.$$

Доказательство теоремы 3 приведено в [7].

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской академии наук
Новосибирск

Поступило
30 IV 1992

ЛИТЕРАТУРА

1. Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с. *Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N.* In: *Studies in Mathematics and its Applications*. Amsterdam, 1990. 309 p.
2. Антонцев С.Н., Доманский А.В. — Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1984, т. 15, № 6, с. 15–27.
3. Кружков С.Н. — Вести. МГУ. Сер. Матем. Мех, 1985, № 2, с. 28–33.
4. *Antontsev S.N., Diaz J.I.* — *Nonlinear Analysis, Theory, Methods, Applications*, 1991, vol. 16, № 4, p. 299–313.
5. Антонцев С.Н. Локализация решений вырождающихся решений механики сплошной среды. Новосибирск, 1986. 108 с.
6. Калашников А.С. — Прикл. мат. и мех., 1978, т. 42, № 1, с. 183–185.
7. Доманский А.В. — Дифференц. уравнения, 1991, т. 27, № 4, с. 641–648.